Devoir libre $n°$**9**
à rendre le 15/04/2012

●●●●●●●●●●●

Soit α et β deux paramètres réels et notons M_α la matrice :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α et β la matrice M_α est elle non inversible ?
2. Résoudre les systèmes :
   (a) $M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
   (b) $M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha + 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
3. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\beta \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\beta \\ -2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\ker[M_\alpha - (\alpha-1)I]^2$. Où I est la matrice unité d'ordre 3.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-\beta & -2 & 1-\beta \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
5. Montrer que $N_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de l'application linéaire associée à M_α.
6. Calculer N_α^n pour tout entier $n \geq 0$. En déduire l'expression de M_α^n.
7. En remarquant que $N_\alpha = N_1 + (\alpha-1)I$, montrer que

   $$M_\alpha^n = f(n)M_1^2 + n(\alpha-1)^{n-1}M_1 + (\alpha-1)^n I$$

   où f est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

   $$f(n+1) = (\alpha+2)f(n) + n(\alpha-1)^{n-1} \text{ avec } f(0) = 0.$$
8. Montrer que la fonction f est de la forme :

   $$f(n) = (an+b)(\alpha-1)^{n-1} + c(\alpha+2)^n$$

   Calculer a, b, c.
   En déduire de nouveau l'expression de M_α^n.

●●●●●●●●●●●