Devoir surveillé $n°1$

12/10/2011
durée 2 heures

`Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.`

•••••••••••

Exercice 1

1. Est-ce que toute suite réelle bornée est convergente ? Justifier votre réponse.
2. Est-ce que toute suite réelle strictement croissante a $+\infty$ pour limite ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 Montrer que la partie $A = \left\{1 - \frac{2}{n} \ /n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est partie bornée de $\mathbb{R}$. Déterminer $\inf(A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 3 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Montrer que :

$$|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 4 On appelle série de Riemann la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. (a) Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}, \ \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$
   (c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que sa limite l est inférieure à 2.
3. (a) Démontrer que, pour tout les éléments n et p de $\mathbb{N}^*$ tels que $n < p$:
$$S_n < S_p < S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \leq l \leq S_n + \frac{1}{n}.$$
   Donner une valeur approchée de l à 5.10^{-4} près. `On démontre que` $l = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 Pour tout n, entier naturel non nul, on pose :

$$s_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 7} + ... + \frac{1}{n(2n+1)}$$

1. Montrer que $\frac{1}{2}s_n = 1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right)$
2. Montrer que $1 - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{2}s_n < 1 - \frac{n}{2n+1}$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \in]0, 2[$.

Exercice 6

1. Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.
   En déduire le module et un argument de $z = \frac{z_1}{z_2}$.
2. Utiliser les résultats précédents pour calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 Démontrer que, si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1, le nombre $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel (pour $z_1 z_2 \neq -1$).

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par la donnée de $u_0 = 2$ et de la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{2u_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, u_n est strictement positif.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\left(u_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{2u_n}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ et ensuite que :
$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \left(u_n - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2.$$
4. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $n \geq 0$,
$$0 \leq u_n - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \left(u_0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{2^n}.$$
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN DE L'ÉPREUVE