Devoir surveillé $n^\circ 2$

25/11/2011
durée 1h45mn

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.

•••••••••••

Exercice 1 *(Questions de cours)* Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un réel, et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1. Est-ce que, si f est continue sur I, alors $f(I)$ est intervalle ?
2. Est-ce que, si f est croissante sur I, alors $f(I)$ est intervalle ?
3. Est-ce que, si $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est continue ?
4. Est-ce que, si $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est monotone sur I ?

Exercice 2 Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par : $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
2. En exprimant $\cos 3\alpha$ en fonction de $x = \cos\alpha$, déduire que
$$x_1 = \cos\frac{\pi}{9},\quad x_2 = \cos\frac{7\pi}{9},\quad x_3 = \cos\frac{13\pi}{9}$$
sont les racines de l'équation $f(x) = 0$.
3. Démontrer que pour tout réel x on a :
$$(2)\qquad 8x^3 - 6x - 1 = 8(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
Indication : remarquer que $8x^3 - 6x - 1 = 8x^3 - 6x - 1 - (8x_1^3 - 6x_1 - 1)$ et mettre $x - x_1$ en facteur, puis $x - x_2$ et $x - x_2$.
4. A l'aide de l'égalité (2) et en développement le deuxième terme, déduire les valeurs de :
$$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$$
$$B = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$
$$C = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$$

Exercice 3 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } x \in [0,1], \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$
soit continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $I = [0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que
$$g \circ f = f \circ g.$$
Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe un réel l de $[0, 1]$ tel que $f(l) = g(l)$.

1. *Question préliminaire :*
   Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. On a donc $f(\alpha) = \alpha$. On dit que α est un point fixe de f.
   Dans la suite de l'exercice, on suppose qu'il n'existe pas de réel $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = g(l)$ et on déduit une contradiction.
   (Il s'agit donc d'un raisonnement par l'absurde).
2. On note h la fonction définie sur I par $h = f - g$. Démontrer que h est de signe constant.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point fixe de f. (c'est-à-dire $f(u_n) = u_n$).
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in [0,1]$. (on ne cherchera pas à calculer l)
4. Dans cette question, nous allons en déduire une contradiction.
   (a) Démontrer que $f(l) = l$.
   (b) Démontrer que $g(l) = l$.
   (c) En déduire une contradiction.
5. Conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE