Devoir surveillé $n°5$

21/02/2012

durée 3 heures

`Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.`

●●●●●●●●●●●

Exercice 1 E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (muni des operations usuelles). On considère les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, 2, 3, 4), e_2 = (1, 1, 1, 3), e_3 = (2, 1, 1, 1), e_4 = (.1, 0, .1, 2) \text{ et } e_5 = (2, 3, 0, 1).$$

Soient alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F \cap G$ et $F + G$?

Exercice 2 Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = (0, 0, 0),\ f(e_2) = (1, 0, 0), \text{ et } f(e_3) = (3, 2, 0).$$

1. Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Determiner une base de $\ker f$ et une base de $\text{Im}\, f$. f est-elle bijective ?
3. Vérifier la théorème du rang.
4. On pose $g = Id_E + f$. Montrer que $g^3 - 3g^2 + 3g - Id_E = 0$, en déduire que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que son inverse est donné par $g^{-1} = g^2 - 3g + 3Id_E$.

Exercice 3 Soit $\overrightarrow{E}_3$ un espace vectoriel rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\overrightarrow{E}_2$ un espace vectoriel rapporté à la base $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.
On désigne par f l'application linéaire de $\overrightarrow{E}_3$ dans $\overrightarrow{E}_2$ définie par :

$$f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{I} + 3\overrightarrow{J},\ \ f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{I} - \overrightarrow{J},\ \ f(\overrightarrow{k}) = 2\overrightarrow{I} + \overrightarrow{J}$$

et par g l'application linéaire de $\overrightarrow{E}_2$ dans $\overrightarrow{E}_3$ définie par :

$$g(\overrightarrow{I}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},\ \ g(\overrightarrow{J}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$$

1. Déterminer $f(x, y, z)$ pour (x, y, z) de $\overrightarrow{E}_3$ et $g(X, Y)$ pour (X, Y) de $\overrightarrow{E}_2$.
2. En déduire l'expression de l'application composée $g \circ f$ et celle de l'application composée de $f \circ g$.
3. Déterminer $\text{rg}(f \circ g)$ et $\text{rg}(g \circ f)$ les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles inversibles.

Exercice 4 Trois sous-espaces $E,\ \ G,\ \ G$ de $\mathbb{R}_2[X]$ sont définis comme suit.

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/P''(X) = 0\}.$$
$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/P'(X) = 0\}.$$
$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X]/P(1) = 0\}.$$

Donner la dimension de $E,\ \ F$ et G. Déterminer le sous espace $H = E \cap F \cap G$ et sa dimension.

Exercice 5 On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieure ou égal à 3 de la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{rl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$. Déterminer les coordonnées de $f(P)(X)$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer l'image par f du polynôme $(X+1)^2$.
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\ker(f)$. f est-elle injective ?

Exercice 6 Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les fonctions f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)$$

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $\mathscr{P} \cap \mathscr{I}$ est réduit à la fonction nulle.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions φ et ϕ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } \phi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

   (a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{P}$, $\phi \in \mathscr{I}$ et $f = \varphi + \phi$.
   (b) En déduire que $E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

4. Soit p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$ et s la symétrie par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$. Calculer l'image par p et s des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto 1 + x, \quad f_2 : x \longmapsto \sin x + \cos x, \quad f_2 : x \longmapsto e^x - e^{-2x}.$$

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E.
Soit $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ une base de E telle que $\{a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_n\}$ soit une base de $\ker f$.
1) Montrer que $\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p)\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.
2) En déduire que

$$\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim E$$

FIN DE L'ÉPREUVE