DEVOIR SURVEILLÉ $n°6$

13/03/2012
durée 2 heures

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.

●●●●●●●●●●●

Exercice 1 Soit u l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \;\; u(P) = X^2P'' + 2XP' + P.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer $u(1), u(X)$ et $u(X^2)$. En déduire que u est inversible.
3. On pose $g = u^2 - 4u + 3Id_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $f = u - 7Id_{\mathbb{R}_2[X]}$
   (a) Montrer que $g \circ f = 0$
   (b) Vérifier que pour tout $T \in \mathbb{R}, \;\; T^3 - 11T^2 + 31T - 21 = (T^2 - 4T + 3)(T - 7)$.
   (c) En déduire que $u^3 - 11u^2 + 31u - 21Id_{\mathbb{R}_2[X]} = 0$, puis déterminer l'inverse de u en fonction de u.
4. On pose $v = u - Id_{\mathbb{R}^3}$.
   (a) Déterminer $\ker v$. v est-il inversible ? Déterminer le rang de v.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} v$, et retrouver le rang de v.

Exercice 2 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 2y - z, x + 3y - z, x + 2y) \end{array}$$

PARTIE I

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Vérifier le théorème du rang. f est-elle injective ?
4. Trouver des vecteurs u, v, w tels que $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}\{u, v\}$ et $\ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}\{w\}$.
5. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(3, 4, 5) = au + bv + cw$.
6. En déduire la valeur de $f^n(3, 4, 5)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE II

Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose qu'il existe $e \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{B} = (e, g(e), g^2(e))$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $(Id_{\mathbb{R}^3}, g, g^2)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
   On note $\mathscr{C}_g = \{h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) / g \circ h = h \circ g\}$.
2. Vérifier que $\mathscr{C}_g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

3. Soit $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que si $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f_1(v_i) = f_2(v_i), \;\; i = 1, 2, 3$ alors $f_1 = f_2$.
4. Justifier l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $h(e) = ae + bg(e) + cg^2(e)$ où $h \in \mathscr{C}_g$.
5. Prouver que pour tout $h \in \mathscr{C}_g$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $h = aId_{\mathbb{R}^3} + bg + cg^2$.
6. En déduire que $\mathscr{C}_g = \mathrm{Vect}\{Id_{\mathbb{R}^3}, g, g^2\}$
7. On pose $e' = (1, 0, 0)$. La famille $(e', f(e'), f^2(e'))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$. Préciser $\mathscr{C}_f$.

FIN DE L'ÉPREUVE