DEVOIR SURVEILLÉ $n°7$

24/04/2012
durée 3 heures

•••••••••••

EXERCICE

Dans cette exercice, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

On pose $g = f + \mathrm{id}_E$.

1. Calculer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.
2. On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = (f + \mathrm{id}_E)(u_1)$ et $u_3 = 2e_1 + e_3$. Montrer que $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Écrire la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}_1$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}_1$ et calculer P^{-1}.
   (c) Exprimer alors A à l'aide des matrices T, P et P^{-1}.
4. On pose $J = I_3 + T$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Calculer J^2.
   (b) Montrer que que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = (-1)^k(I - kJ)$.
   (c) En déduire l'expression de A^k pour tout entier naturel non nul k.
5. APPLICATION : Déterminer les suites réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, sachant que $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et pour tout naturel $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_n = -2u_{n-1} + 5v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + 4v_{n-1} + 2w_{n-1} \\ w_n = 2u_{n-1} - 10v_{n-1} - 5w_{n-1} \end{cases}$$

Poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note D l'application définie sur E, et à valeurs dans E, qui à toute fonction f de E associe $D(f) = f'$, sa dérivée, ainsi que Id l'identité de E, vérifiant $Id(f) = f$ pour toute application f de E.
Dans la suite du problème α désigne un réel non nul et on note F_α, l'ensemble des fonctions de E de la forme

$$x \longmapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-ax}$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1. On note id_α, l'application identique sur F_α.

1. (a) Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) On considère les fonctions suivantes :
   $$f_1 : x \longmapsto e^{\alpha x}, \ \ f_2 : x \longmapsto xe^{\alpha x}, \ \ f_3 : x \longmapsto e^{-\alpha x}, \ \ f_4 : x \longmapsto xe^{-\alpha x}.$$
   Montrer que la famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α.
   On note D_α, la restriction de D à F_α, c'est a dire l'application définie sur F_α, qui à toute fonction f de F_α associe $D_\alpha(f) = f'$, sa dérivée.
2. (a) Montrer que D est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau et son image.
   (b) Montrer que D_α, est un endomorphisme de F_α.
   (c) Déterminer M_α, la matrice de D_α, dans la base $\mathscr{B}$.
   (d) Montrer que la matrice M_α est inversible.
3. Soit λ un réel. Déterminer en fonction de λ le rang de l'endomorphisme $D_\alpha^2 - \lambda id_\alpha$.
4. (a) Déterminer une base du noyau de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$ et une base de l'image de $D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha$.
   (b) Déduire de **4**.(**a**) que pour tout f de F_α, on a l'égalité :
   $$(D_\alpha^2 - \alpha^2 id_\alpha)^2(f) = 0.$$
   (c) Montrer que $D_\alpha^4 - 2\alpha^2 D_\alpha + \alpha^4 id_\alpha = 0$ et en déduire D_α^{-1}.
5. (a) On se place désormais dans E. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
   $$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0.$$
   (b) Déterminer le noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$.
   (c) Montrer que pour toute application f, appartenant au noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$, il existe un couple de réels, (λ_1, λ_3), tel que $(D^2 - \alpha^2 Id)(f) = \lambda_l f_l + \lambda_3 f_3$, puis que l'application
   $$g = f - \frac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \frac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$$
   appartient au noyau de $D^2 - \alpha^2 Id$. En déduire le noyau de $(D^2 - \alpha^2 Id)^2$.
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
   $$y^{(4)}(x) - 2\alpha^2 y''(x) + a^2 y(x) = 0.$$
   où l'on note $y^{(4)}$ la dérivée quatrième de la fonction $x \longmapsto y(x)$.
7. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = x^3 - 12x + 2.$$
   (a) Montrer que $\mathscr{E}$ possède une solution polynômiale et la déterminer. On notera par la suite f_0, cette solution polynômiale.
   (b) Soit f une solution de $\mathscr{E}$; montrer que $f - f_0$ est un élément du noyau de $(D^2 - Id)^2$ et en déduire l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$.

FIN DE L'ÉPREUVE