DEVOIR SURVEILLÉ n°8

05/06/2012

durée 2h30 heures

•••••

Exercice 1 Soit σ la permutation de S_{10} définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. Retrouver sa signature.
3. Déterminer σ^{2012} .

Exercice 2 1. En utilisant l'identité $(X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, démontrer que les polynômes $X^3 + 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.

2. Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$.
3. Déterminer l'ensemble des couples de polynômes (U, V) tels que :

$$(X^3 + 1)U + (X^2 + X + 1)V = 1.$$

4. Déterminer une décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ et $X^3 - 1$. En déduire leur pgcd et leur ppcm.
5. Retrouver le pgcd de $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ et $X^3 - 1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3 Le but de l'exercice est de calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle : $\frac{4X^4}{(X^4 - 1)^2}$.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction rationnelle $\frac{2X}{X^2 - 1}$. En déduire que :

$$\frac{4X^4}{(X^4 - 1)^2} = \frac{1}{(X^2 + 1)^2} + \frac{1}{(X^2 - 1)^2} + \frac{2}{X^4 - 1}.$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2 - 1}$. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{(X^2 - 1)^2}$.

3. Utiliser la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2 - 1}$ pour donner la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^4 - 1}$.

4. Déduire des questions précédentes la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{4X^4}{(X^4 - 1)^2}$.

Exercice 4 On considère la série harmonique, de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. On note h_n ses sommes partielles, définies pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq u_k \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq \ln(n) + 1.$$

3. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge et que h_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

4. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\delta_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$$

Montrer que $0 \leq \delta_n \leq u_n - u_{n+1}$. En déduire que la série $\sum \delta_n$ converge.

5. En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n - \ln(n) = \gamma.$$

(γ s'appelle la constante d'Euler, $\gamma \simeq 0.577$)

6. Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1} u_n$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

7. Vérifier que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$. En déduire l'expression suivante des sommes partielles.

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt.$$

8. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\left| s_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

9. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \ln(2).$$

10. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $|r_n| = |s_n - \ln(n)| \leq 10^{-3}$?

11. Démontrer l'égalité $s_{2n} = h_{2n} - h_n$. Retrouver la limite de la suite $(s_n)_n$ en utilisant le résultat de la question 5.

FIN DE L'ÉPREUVE