DEVOIR SURVEILLÉ $n°9$

29/06/2012
durée 2h30mn

••••••••

Exercice 1 Dans l'espace affine E de dimension 3 rapporté à un repère cartésien $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x - 3y + z + 1 = 0$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de composantes $(2, 1, -2)$. On note p la projection sur $\mathscr{P}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v}$ et s la symétrie par rapport au plan $\mathscr{P}$ dans la direction de .

1. Écrire les coordonnées (x', y', z') du point $M' = p(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.
2. En déduire la matrice P dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de la partie linéaire $\overrightarrow{p}$ de p.
3. Calculer la matrice P^2. Quel est le rang de P ?
4. Écrire les coordonnées (x'', y'', z'') du point $M'' = s(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.
5. En déduire la matrice S dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de la partie linéaire $\overrightarrow{s}$ de s. Calculer S^2.
6. Soit α un réel. On rappelle que l'affinité a de base $\mathscr{P}$, de direction la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{v} = \text{Vect}(\overrightarrow{v})$ engendrée par $\overrightarrow{v}$ et de rapport α est l'application de E dans E définie par :
$$\overrightarrow{p(M)a(M)} = \alpha \overrightarrow{p(M)M},$$
pour tout point M de E.
Écrire, pour tout couple (M, N) de points de E, le vecteur $\overrightarrow{a(M)a(N)}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{p(M)p(N)}$.
7. En déduire que a est affine et exprimer sa partie linéaire $\overrightarrow{a}$ en fonction de $\overrightarrow{p}$ et de $id_{\overrightarrow{E}}$. Exprimer la matrice A de $\overrightarrow{a}$ en fonction de la matrice P et de la matrice identité. Déterminer un polynôme du second degré annulant A.

Exercice 2 Nous considérons la suite (I_n) définie pour $n \geq 1$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)dx$

1. Montrer que les intégrales I_n existent et, sans calculer I_n, établir que cette suite est décroissante et minorée.
2. Nous rappelons que $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$.
a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} pour $n \geq 1$.
b) Calculer I_n pour $n = 1, 2$, puis $n = 3$ et 4.
c) Établir l'inégalité $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Exercice 3 Question préliminaire : Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $u, v : J \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)dt.$$

Justifier que φ est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Dans tout l'exercice f désigne la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^3-1}$ et F la fonction numérique définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt.$$

Partie A

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
2. Démontrer que F est définie sur $]-1, 1[\cup]1, +\infty[$
3. Donner l'expression de $F'(x)$ fonction dérivée de F, et étudier le sens de variation de F sur $]1, +\infty[$.
4. Montrer que pour $x > 1$:

$$(x^2 - x)f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2 - x)f(x).$$

En déduire : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.

Partie B

1. Déterminer les constantes a, b et c tels que :

$$F(x) = a\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + \int_x^{x^2} \frac{bt+c}{t^2+t+1}dt.$$

2. Soit $h : t \longmapsto \dfrac{-1}{2}\dfrac{t+2}{t^2+t+1}$.
   (a) Étudier le sens de variation de h sur $[0, +\infty[$.
   (b) Quelle est le signe de $h(t)$ sur $[0, +\infty[$?
3. Démontrer que : pour tout $x \geq 1$:

$$(x^2 - x)h(x) \leq \int_x^{x^2} h(t)dt \leq (x^2 - x)h(x^2).$$

et en déduire : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \int_x^{x^2} h(t)dt$.

4. Démontrer que : $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)dt$ a une limite que l'on précisera, lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
5. Démontrer que : $l = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} F(x)$ existe et le calculer.
6. Montrer que : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{F(x) - l}{x-1}$ existe et le calculer.
7. Rassembler les résultats des questions précédentes pour tracer la courbe d'équation : $y = F(x)$; $x \in]1, +\infty[$.

Fin de l'épreuve