SÉRIE $n°01$

Ensembles et applications

Année scolaire 05/06

Exercice 1

1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.
3. E ayant n éléments, quel est le nombre des éléments de $\mathcal{P}(E)$. (démonstration par récurrence)

Exercice 2

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 3

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Démontrer que $f \circ f = Id$.

Exercice 4

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ tel que $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Exercice 7

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation R par :

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de chaque $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 8

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total noté $\leq$. On considère la relation $\mathcal{R}$ dans E définie par les couples $((x, y), (x', y'))$ tel que $x < x'$ ou que $x = x'$ et $y \leq y'$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Exercice 10

Soient E,F et G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On pose $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est injective, f l'est aussi.
2. Montrer que si, en outre, f est surjective, g est injective.

Exercice 11

Soit A et B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Exercice 12

Soit I un ensemble non vide, pour tout $i \in I$, on se donne un ensemble E_i.

1. Montrer que

$$\complement_E^{\bigcap\limits_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \complement_E^{E_i} \text{ et } \complement_E^{\bigcup\limits_{i \in I} E_i} = \bigcap_{i \in I} \complement_E^{E_i}$$

en particulier, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^C \text{ et } \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^C$$

2. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer que : $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.

Exercice 13

Soit E un ensemble et A une de ses parties, l'application φ_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \in A \\ 0 & si \ x \in A^C \end{cases}$$

est appelé fonction caractéristique de la partie A de E
Démontrer que, A et B étant deux parties de E non vides, pour tout $x \in E$:

- $\varphi_{E \setminus A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.
- $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.
- $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

PROF : M.TARQI

Exercice 14

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 15

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit g de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$ par $g(Y) = f^{-1}(Y) = \{x \in E / f(x) \in Y\}$ pour toute partie Y de F.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si g est injective.
2. Montrer que f est injective si et seulement si g est surjective.

Exercice 16

Montrer qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble E sur l'ensemble de ses parties. (On pourra considérer la partie de A de E définie par

$$A = \{x \in E : x \notin s(x)\}$$

où s est une surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice 17

Soient E, F et G trois ensembles et g une application définie de F à valeurs dans G. On définit l'application f de F^E à valeurs dans G^E par :

$$\forall h \in F^E : f(h) = g \circ h$$

Montrer que

1. l'application f est injective si et seulement si g est injective
2. l'application f est surjective si et seulement si g est surjective

Exercice 18

Soit E un ensemble. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ sont en bijection.

Exercice 19

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $\mathscr{S}$ une relation d'équivalence sur F. On définit sur E la relation $\mathscr{R}$ par :

$$x \mathscr{R} y \iff f(x) \mathscr{S} f(y).$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E et déterminer la classe d'équivalence d'un élément donné x de E.

• • • • • • • • • •