SÉRIE $n°02$

Nombres complexes

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Considérons l'équation dans $\mathbb{C}$ (n est un entier naturel non nul) :
$$P(z) = (z-i)^n - (i-\bar{z})^n = 0$$

1. Soit A, M et M' les points d'affixes i, z et $\bar{z}$.
   a) Montrer que si z est une racine de l'équation $P(z) = 0$, alors $AM = AM'$.
   b) En déduire que si z est une racine l'équation $P(z) = 0$, alors z est un réel.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$

Exercice 2

Montrer que pour tout couple (a, b) de nombres complexes, on a l'égalité suivante
$$|a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}(|a+b|^2 + |a-b|^2)$$
Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 3

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. t désigne un nombre réel tel que $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre de $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2(1+\cos 2t)z + 2(1+\cos 2t) = 0$$
Les solutions seront appelées z_1 et z_2, z_1 désignant celle dont la partie imaginaire est strictement positive. On note A le point d'affixe 1.
2. Soit M et M_1 les points d'affixes $z = 1 + e^{it}$ et z_1. Montrer que la droite (OM_1) est parallèle à la droite (AM).
3. Comparer l'aire $A(t)$ du triangle AM_1M à celle du triangle AOM.
Étudier le maximum de l'aire $A(t)$ lorsque t parcourt $]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Exercice 4

A tout point M d'affixe $u \neq 1$, on associe le point N d'affixe $v = \dfrac{u-1}{1-\bar{u}}$.

1. Montrer que v est de module 1, $\dfrac{v-1}{u-1}$ est réel et que $\dfrac{v+1}{u-1}$ est imaginaire pur.
2. En déduire une construction géométrique du point N connaissant le point M.

Exercice 5

Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n - \overline{u_n})$$

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$, on considère la transformation :
$$f : z \longmapsto \frac{z+|z|}{2}$$
et la suite définie par la donnée de z_0 et $z_{n+1} = f(z_n)$. Étudier la suite $(z_n)_n$.

Exercice 7

1. Soit l'équation : (E) $z^5 - 1 = 0$.
Vérifier que les racines de (E) sont : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait : $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$
3. a) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :
$$z + \frac{1}{z} = u$$
   b) De la question précédente, déduire les valeurs de :
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}$$

Exercice 8

Soit A, B et C trois points distincts du plan complexe d'affixes a, b et c, respectivement. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. ABC est un triangle équilatéral.
2. $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Exercice 9

Soit $w = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = w + w^2 + w^4$ et $T = w^3 + w^5 + w^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T.

Exercice 10

Montrer que pour tout x réel, on a $|\sin(x)| \leq |x|$. En déduire l'inégalité
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R};\, |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$$
Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

PROF : M.TARQI

Exercice 11

Dans le plan complexe on considère les points $A(2+4i)$, $B(3-3i)$, $C(4)$ et $D(-1+5i)$. Montrer que ces quatres points sont cocycliques.

Exercice 12

Soit n un entier naturel non nul et $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1}\ ; \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^{kp},\ p \in \mathbb{Z};; \quad et$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \omega^k$$

•••••••••••