SÉRIE $n°04$

Fonctions numériques : limites et continuité

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $a \geq 0$ il existe $b \geq a$ en lequel f atteint son maximum sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

1. Trouver l'ensemble de définition de f.
2. Simplifier l'expression de f.

Exercice 3

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Montrer que la fonction $f(x) = (-1)^{E(\frac{1}{x})}\dfrac{x^3}{1+x+x^2}$ est prolongeable par continuité au point 0.

Exercice 5

Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle monotone ?
3. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Exercice 8

Soient f une fonction croissante sur $]0, +\infty[$ et g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que si g est décroissante, f est continue.

Exercice 9

Étudier les variations de la fonction f définie par la relation : $f(x) = \sup(x, \dfrac{1}{x})$.

Exercice 10

Étudier les suites numériques définies par les relations de récurrences :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n+1},\ u_0 = 0 \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{2-v_n},\ v_0 \leq 2$$

Exercice 11

Étudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$

Exercice 12

Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \cos \pi x$$

1. f et g sont-elles périodiques ? Si oui, quelle est leur plus petite période strictement positive ?
2. $f+g$ est-elle périodique ?

Exercice 13

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^0} + \frac{x^2}{(1+x^2)^1} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

1. f_n est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. x étant un réel, étudier la limite éventuelle de la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)$$

   a) Déterminer $f(x)$ en fonction de x seulement.
   b) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   c) Comparer $\lim\limits_{x\longrightarrow0}[\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)]$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}[\lim\limits_{x\longrightarrow0} f_n(x)]$

Exercice 14

Montrer que la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad |f(x)| \leq ax+b \quad (1).$$

2. En déduire que la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2$, n'est pas uniformément continue.

PROF : M.TARQI

Exercice 16

Soit f une fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

1. Déterminer le nombre des racines de f, et leur position par rapport à 1 et -1.
2. Pour tout réel α, exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$.
3. a) Déterminer l'ensemble des réels α tels que $f(\cos\alpha) = 0$.
   b) En déduire l'ensemble des racines réelles de f.

Exercice 17

Soient f la fonction de $[0, 3\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0, 3\pi], f(x) = x + \sin x$$

et $(u_n)_n$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0, 3\pi] \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En étudiant la fonction f, déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_n$ suivant les valeurs de u_0.

Exercice 18

Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe lorsque : a) f est continue b) f est contractante c) f est croissante.

Exercice 19

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0, +\infty[$. On suppose que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que pour tout $x > a$ on a : $f(x) > f(0)$.
2. En déduire que f est minorée sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, a]$ tel que $f(\alpha) = \inf\limits_{[0,+\infty[} f$.

Exercice 20

Soit la fonction $g(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = g(x_n)$.

1. Calculer $f = g \circ g$ et développer $f(x) - x$ en un produit de facteurs.
2. Montrer que :
$$-1 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x \leq f(x) \leq 1$$
$$1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Longrightarrow 1 \leq f(x) \leq x$$
3. On suppose $-1 \leq x_0 \leq 1$. Étudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par :
$u_n = x_{2n}, n \geq 0 \quad$ et $\ v_n = x_{2n+1}, n \geq 0$
4. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$

Exercice 21

Partie A : Soit f un fonction numérique définie sur $[0, 1]$. On suppose qu'il existe une constante positive k telle que on ait :

$$(1) \quad \forall x \in [0, 1], \ 0 \leq f(x) \leq k(1 - x)$$

1. Quelle est l'image de 1 par f ?
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = 1 - x^2$ vérifié (1).
3. Montrer que la fonction g définie sur [0,1] par $g(x) = x - E(x)$ ne vérifié pas (1). $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Partie B : Soit f une fonction vérifiant (1). On suppose de plus que la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{f(x)}{x - 1}$ existe et finie. On définit la fonction φ sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(1) = 0 \ \text{ et pour } \ x \in [0, 1], \ \ \varphi(x) = \frac{xf(x)}{1 - x}.$$

1. Que veut $\varphi(0)$? Quelle condition doit vérifier f pour que φ soit continue à gauche au point 1 ?
2. Pour tout entier n différent de 0 on note g_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
$$g_n(x) = x^n f(x).$$
   a) Montrer que g_n vérifie (1). Que valent $g_n(0)$ et $g_n(1)$?
   b) On considère la fonction S_n telle que :
$$S_n = g_1 + g_2 + ... + g_n$$
   Calculer $S_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
   c) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} S_n(x) = \varphi(x)$

••••••••••