

Fonctions dérivées

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $] - a, a[$.

1. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors sa dérivée f' est impaire (resp. paire).
2. En déduire la parité de la fonction g définie sur $] - a, a[$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

Exercice 2

Exprimer sous forme de fraction rationnelle les sommes suivantes :

1. $S_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.
2. $S_1(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$.

Exercice 3

Soit la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Trouver a et b pour que f soit continue et dérivable en 0.

Exercice 4

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 e^x$.
2. $g(x) = x^2(1+x)^n$.

Exercice 5

Montrer que l'équation $e^x - x - 1 = 0$ n'a qu'une seule racine $x = 0$.

Exercice 6

On cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que :

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) \times f'[f(x)] = \frac{1}{2} & (1) \\ f(0) = 0 & (2) \\ f' \text{ est continue en } 0 \text{ et } f'(0) > 0 & (3) \end{cases}$$

Soit f un élément de $\mathcal{E}$.

1. Déterminer $f \circ f$.
2. Démontrer que :

- a) $(\forall x \in \mathbb{R}), f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$;
- b) $(\forall x \in \mathbb{R}), f'\left(\frac{x}{2}\right) = f'(x)$;
- c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}), f'\left(\frac{x}{2^n}\right) = f'(x)$;
- d) $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(0) = f'(x)$.

3. En déduire f' , puis f .
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 7

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, +\infty[$ dérivable sur $]a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$). On suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Exercice 8

1. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que

$$l = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

existe. Montrer que f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

2. On définit f sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$).
a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

où P_n est un polynôme, dont on précisera le degré et le coefficient maximal.

- b) Étudier la continuité et la dérivabilité à l'ordre n en 0 (à droite).

Exercice 9

Soit f une fonction numérique définie dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

1. a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x > x_1 \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right| < \varepsilon$$

- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

2. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$ on a :

$$f[x + cf(x)] \sim f(x) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = x - f(x)$$

- a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que g soit continue et strictement croissante dans $]a, +\infty[$.
- b) En déduire qu'il existe une fonction h définie dans $]g(a), +\infty[$, continue, strictement croissante, non bornée et telle que

$$g(h(y)) = y, \quad \forall y \in]g(a), +\infty[$$

- c) Montrer que $h(y) - y \sim f(y) \quad (y \rightarrow +\infty)$

Exercice 10

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, p réels distincts et $P_1, P_2, \dots, P_p$ des fonctions polynômes. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^p P_i(x) e^{\alpha_i x} = 0 \implies \forall i : P_i = 0.$$

Exercice 11

On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, qui soit continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, et telle que :

$$(1) \forall x \geq 0, f(x^2) = [f(x)]^2$$

- Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$
 - Quelles sont les fonctions constantes qui peuvent convenir ?
- Soit $a \in]0, 1[$. On considère la suite $u_n = f(a^{2^n})$ pour $n \geq 0$. On suppose f solution du problème.
 - Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?
 - Montrer que $f(a)$ ne peut pas être supérieure à 1.
 - Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante sur $[0, 1]$.
 - Que dire de $f(a)$ si f est non constante sur $[0, 1]$? Que veut alors $f(0)$?
- On suppose toujours $a \in]0, 1[$. On considère la suite $v_n = f(a^{2^{-n}})$ pour $n \geq 0$.
 - Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?
 - Montrer que si $f(a) = 0$, la fonction f est constante.
 - On suppose f non constante ? Que veut alors $f(1)$?
- On suppose f non constante.
 - Montrer que $f(x) \neq 0, \forall x > 0$.
 - On pose alors $g(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)}$. Exprimer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$.
 - Montrer que la fonction g est constante.
 - En déduire toutes les fonctions f solution du problème.

Exercice 12

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

- En appliquant le théorème de ROLLE à f puis à ses dérivées, trouver le nombre de racines réelles de f''' sans déterminer explicitement f''' .
- En déterminant explicitement f''' , trouver l'ensemble des racines réelles de f''' .

Exercice 13

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La dérivée n'est pas supposée continue.

- Soient $a, b \in I$ tels que $f'(a) < f'(b)$ et $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $h_0 > 0$ tel que :

$$\forall h \in]0, h_0[, a+h, b+h \in I$$

et

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

- En déduire qu'il existe $h > 0$ et $y \in I$ tels que : $y+h \in I$ et $\frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$.
- Montrer qu'il existe $x \in I$ tel que $f'(x) = z$.
- En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 14

Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction réelle de la variable réelle, définie par :

$$f(x) = \ln(1+x^2) - \arctan(x)$$

est de la forme

$$f^n(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n},$$

où P_n est un polynôme de degré n , ayant n racines réelles et distinctes.

● ● ● ● ● ● ● ●