SÉRIE $n°06$

Fonctions usuelles- Fonctions convexes

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\varphi(t)=\sin t-t+\frac{t^t}{6}.$$

Donner les tableaux de variations de φ'', φ' et φ. En déduire que :

$$\forall t\in[0,+\infty[,\ \ t-\frac{t^3}{6}\leq \sin t\leq t.$$

Exercice 2

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t>0\\ 0, & \text{si } t<0\end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t=0$.
2. Étudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t<0$, la dérivée n-ième de f s'écrit $f^{(n)}(t)=\dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{\frac{1}{t}}$ où P_n est un polynôme.
   a) Trouver P_1 et P_2.
   b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n\in\mathbb{N}$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0
2. a) On suppose $x>0$. Montrer en posant $x=\tan t$ avec $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, que : $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x$
   b) En déduire $f(x)$ pour $x<0$.
   c) f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4

Si $\alpha\in]0,\pi[$, calculer la dérivée n-ième de la fonction :

$$f(x)=\frac{x-\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$$

Remarquer que $f(x)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{x-e^{i\alpha}}\right)$.

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

1. $2\arcsin x=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
2. $\arcsin 2x-\arcsin x\sqrt{3}=\arcsin x$;
3. $f\circ f(x)=x$ avec $f(x)=x\arctan\sqrt{x}$.

Exercice 6

Étudier les fonctions

1. $f:x\longrightarrow\arcsin(4x^3-3x)$;
2. $g:x\longrightarrow\arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Exercice 7

Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction réelle de la variable réelle, définie par :

$$f(x)=\ln(1+x^2)-\arctan(x)$$

est de la forme

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n},$$

où P_n est un polynôme de degré n, ayant n racines réelles et distinctes.

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}\ .$$

   a) Calculer la dérivée de f. Vérifier que $f'(x)$ est du signe de $\cos x-\dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire les variations de f sur $[0,\pi]$, et tracer sa courbe représentative.
2. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\forall x\in[0,\pi],\qquad g(x)=\arccos\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)\ .$$

   a) Vérifier que g est bien définie en tout point de $[0,\pi]$.
   b) Pour $x\in[0,\pi]$, simplifier les expressions $\cos\big(g(x)\big)$ et $\sin\big(g(x)\big)$.
   c) Calculer $g'(x)$ pour $x\in]0,\pi[$ (pour cela, on pourra dériver la relation donnant $\cos\big(g(x)\big)$ obtenue à la question précédente). La fonction g est-elle dérivable sur $[0,\pi]$?

PROF : M.TARQI

d) Vérifier que $\forall x \in [0,\pi] \quad g\big(g(x)\big) = x$.
Qu'en déduit-on concernant la courbe (Γ) représentant g ?

e) Construire la courbe (Γ).

3. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel z appartenant à $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b) Montrer que $z = g(x)$.

Exercice 9

Déterminer les intervalles de concavité et de convexité de la fonction : $f(x) = e^{-x^2}$. (Courbe de Gauss)

Exercice 10

Soit $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

$$(1) \quad \forall x,y \in [a,b],\ \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y)$$

Montrer que si ϕ est continue alors ϕ est convexe.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de nombres réels strictement positifs. On pose :

$$m_a = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right),\ m_g = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}},\ m_q = \left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Comparer m_a et m_g.
2. En considérant la fonction convexe $x \longmapsto x^2$ comparer m_a et m_q.
3. En posant $x_k = e^{t_k}$ montrer que : $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^{n-k} + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{n-k} \geq n.$$

5. Soit P un polynôme de degré n à coefficients positifs.

a) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} P\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) + P\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \geq nP(1).$$

b) En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(P\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)\right)^2 + \left(P\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right)^2 \geq n\,(P(1))^2.$$

• • • • • • • • • •