

Développements limités

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Déterminer les développements limités dans un voisinage de 0, à l'ordre 4 des fonctions :

1. $f(x) = 3 \sin(2x) - 2 \sin(3x)$.
2. $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.
3. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.
4. $f(x) = (1 + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{2}}$.
5. $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{1+x}}$.
6. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$.
7. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

Exercice 2

Soit M un nombre réel strictement positif et f une fonction continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq Mn!$$

1. Démontrer que f est nulle sur $] -1, 1[$.
2. Démontrer que f est nulle et admet des dérivées de tout ordre nulles en -1 et 1 .
3. Démontrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est-à-dire que f'' est continue sur $[a, b]$) et α, β deux nombres réels tels que $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

1. Montrer que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, il existe $\theta_x \in [\alpha, \beta]$ tel que :

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - \frac{1}{2}(x - \alpha)(\beta - x)f''(\theta_x).$$

(Indication : poser

$$g(y) = f(y) - f(\alpha) + (y - \alpha) \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} - C(y - \alpha)(\beta - y)$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in]\alpha, \beta[$, choisir C tel que $g(x) = 0$ et appliquer le théorème de Rolle).

2. Montrer que la fonction $x \mapsto f''(\theta_x)$ est continue sur $[\alpha, \beta]$.

Exercice 4

1. En utilisant la formule de Taylor, étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Utiliser la fonction $f(x) = \ln(1+x)$.

2. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right).$$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = 2 \tan x - x.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Justifier que f est impaire.
3. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 5 au voisinage de 0. On rappelle que $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0.

Exercice 8

Soient $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)$ et $g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + o(x^4)$ les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 de deux fonctions f et g .

1. Donner développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f[g(x)] - g[f(x)]$.
2. Application : Donner développement limité à l'ordre 4

au voisinage de 0 des fonctions :

$$f_1(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \sin(x)} - \sin \frac{x}{1 - x},$$

$$f_2(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)).$$

• • • • •