SÉRIE $n°09$

Arithmétique élémentaire

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soient $a = 3n + 1$ et $b = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

1. Montrer que $a \wedge b = 2 \wedge (n - 1)$.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles a et b sont premiers entre eux.

Exercice 2

Soient $a = 7n^2 + 5n + 1$ et $b = 7n + 3$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a \wedge b = 1$.

Exercice 3

1. Montrer que, $\forall b \in \mathbb{N}, b \geq 2$, les entiers b^2 et $b - 1$ sont premiers entre eux.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : $b^2 x + (b - 1)y = 1$ où $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$.
3. Application : Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $9x + 2y = 1$.

Exercice 4

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $13x + 31y = 1$ (1)

1. a) Dire pourquoi l'équation (1) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b) En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (1)
2. a) Montrer que :
   $$(x, y) \text{ solution de } (1) \iff 13(x - x_0) = 31(y_0 - y) \quad (2)$$
   b) En utilisant le théorème de GAUSS, déterminer les solutions de (2). En déduire toutes les solutions de (1).

Exercice 5

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $mx + (2m + 1)y = 2$.
2. Application : Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $3x + 7y = 2$.

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier divisible par 2^n.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $5 / 2^{3n+5} + 3^{n+1}$.
2. Montrer que pour tout entier n, $30 / n^5 - n$.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de $16^{(2^{1000})}$ par 7 ?

Exercice 8

1. Soient $a \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers. Si $a^n - 1$ est un nombre premier, montrer que $a = 2$ et que n est premier.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $2^n + 1$ est premier, montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 9

Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} (écrit dans la base 10) et B la somme des chiffres de A. Que vaut C, la somme des chiffres de B ? $(C = 7)$

Exercice 10

1. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
2. Pour tout entier n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombres de FERMAT)
   a) Montrer que les nombres $(F_n)_n \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux deux à deux.
   b) En déduire une autre démonstration du fait qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 11

1. Montrer l'équivalence
   $$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a \wedge b = 1 \iff a^2 \wedge b^2 = 1$$
2. a) On suppose a et b quelconques. Montrer que $a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2$.
   b) Application : Déterminer $144 \wedge 81$.

Exercice 12

1. Soit $n = p_1^{\alpha_1}$ où p_1 est premier et $\alpha_1 \in \mathbb{N}^*$.
   Quels sont les diviseurs de n dans $\mathbb{N}$? Quel est leur nombre ?
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, p_i premier et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$, $p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$.
   Montrer par récurrence sur k que le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$ est
   $$d(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)...(1 + \alpha_k)$$
3. Application : Calculer $d(n)$ dans le cas où $n = 360$.

Exercice 13

1. Déterminer x pour que : $\overline{1x2}^4 = \overline{2x1}^3$
2. Écrire $7x + 1$ dans la base 5

PROF : M.TARQI

Exercice 14

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et a un entier naturel divisible par m. Montrer que $\forall b \in \mathbb{N}$
$$a + b \text{ divisible par } m \Longleftrightarrow b \text{ divisible par } m$$
2. Montrer que pout entier naturel n, $10^n - 1$ est divisible par 3.
3. Soit $x = \overline{q_n r_{n-1} ... r_1 r_0}^{10}$
   a) Montrer que :
   x est divisible par 3 $\Longleftrightarrow q_n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i$ est divisible par 3
   b) Montrer que :
   x est divisible par 4 $\Longleftrightarrow 2r_1 + r_0$ est divisible par 4
4. Application : Le nombre 1345689401572 est-il divisible par 3 ? par 4 ?.

Exercice 15

Soient a un entier naturel et m un entier impair.

1. Montrer que $a + 1$ divise $a^m + 1$.
2. Soit q un nombre premier.
   a) Démontrer que $(a + 1)^q \equiv a^q + 1[q]$.
   b) En déduire que : $a^q \equiv a[q]$.
3. Soit n un entier supérieur où égal à 2, posons $a_n = (n!)^2 + 1$
   a) Démontrer que a_n est impair.
   b) Démontrer que a_n admet un diviseur premier p strictement supérieur à n.
   c) Supposons que p s'écrit sous la forme $p = 4k + 3$. Montrer que a_n divise $(n!)^{2(2k+1)} + 1$ et que p divise $(n!)^p + n!$.
   d) Déduire que p ne peut pas s'écrire sous la forme $p = 4k + 3$.
4. En déduire que la suite $(4n + 1)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une infinité de nombres premiers.

Exercice 16

(**Nombres de FIBONACCI**[1]) Considérons la suite numérique $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation de récurrence :

$$(1) \quad \forall n \geq 3,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad et \quad f_1 = f_2 = 1$$

Cette suite est appellé la suite de **Fibonacci** et les termes de cette suite sont appelés nombres de **Fibonacci**.

1. Montrer que :
$$(2) \quad f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$$
2. Montrer que :
$$(3) \quad f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$
3. Démontrer la formule :
$$(4) \quad f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + (-1)^{n+1}$$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N}$ on a :
$$f_{m+n} = f_{m+1} f_n + f_m f_{n-1}.$$
5. Montrer que si m divise n, alors f_m divise f_n.
6. Montrer que tout terme de la suite de Fibonacci est premier avec son voisin, c'est à dire
$$pgcd(f_n, f_{n+1}) = 1$$
$\forall n \geq 1$.
7. Montrer que
$$pgcd(f_m, f_n) = f_{pgcd(m,n)}.$$
En déduire l'équivalence : m divise n si et seulement si f_m divise f_n.

La dernière proposition affirme le pgcd de deux nombres de Fibonacci est aussi un nombre de Fibonacci et que, de plus, ce n'est pas n'importe lequel : le rang du pgcd est le pgcd des rangs.

• • • • • • • • • • •

1. Le nom de suite de Fibonacci a été donné par l'arithméticien français Edouard Lucas en 1817, alors qu'il étudiait ce qu'on appelle aujourd'hui les "suites de Fibonacci généralisées" obtenues en changeant les deux premiers termes de la suite de Fibonacci et qui suivent le même procédé de construction. La plus simple d'entre elles, dont les deux premiers termes sont 1 et 3, s'appelle aujourd'hui ... la suite de ... Lucas ! (Elle commence par 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...). Les suites de Fibonacci et de Lucas sont très liées.