SÉRIE $n°10$

Entiers naturels. Dénombrement

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et n un diviseur de a dans $\mathbb{N}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$n/b \Longleftrightarrow n/(a+b)$$

Exercice 2

Déterminer le cardinal de l'ensemble des relations binaires dans un ensemble E à n éléments.

Exercice 3

1. Soit E un ensemble à n éléments. Calculer le cardinal de l'ensemble des couples (P,Q) tels que $P \cup Q = E$.
2. Soit E un ensemble fini à n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ces parties. Quel est le nombre de couples $(X,Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$?

Exercice 4

Soit E un ensemble. Montrer que si $\mathcal{P}(E)$ est fini, alors E est fini.

Exercice 5

1. Montrer que $\forall m \geq 1 \ \forall n \geq 1 \ \complement_n^m = \complement_n^{n-m}$
2. Montrer que $\complement_n^m = \complement_{n-1}^m + \complement_{n-1}^{m-1}$ et $\complement_n^m = \complement_{n-2}^m + 2\complement_{n-2}^{m-1} + \complement_{n-2}^{m-2}$
(en isolant un élément a de E, puis deux éléments a et b de E)
3. $\sum_{m=0}^{m=n} \complement_n^m = 2^n$ (Soit φ_A la fonction caractéristique d'une partie A de E, on montrera que l'application de $P(E)$ dans l'ensemble des fonctions caractéristiques définis sur E $A \longrightarrow \varphi_A$ est une bijection, et on calculera $\text{card}\mathcal{F}(E,\{0,1\})$. En déduire que $\text{card}E = n \Longrightarrow \text{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$).

Exercice 6

Soit E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ une involution, c'est-Ã -dire $f^2 = Id_E$, $A = \{x \in E / f(x) \neq x\}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (y = x \text{ ou } y = f(x))$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On suppose A fini, montrer que $\text{card}A$ est pair.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes : $\sum_{i+j=n} ij$ et $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{p-1} (i+j)$.

Exercice 8

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que :

$$f(2) = 2 \text{ et } \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, f(mn) = f(m)f(n)$$

Exercice 9

Soit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & f(p,q) = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p \end{array}$$

1. Montrer que :
$$\forall q \in \mathbb{N}, \ f(q+1,0) = f(0,q) + 1$$
et
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}, \ f(p-1,p+1) = f(p,q) + 1.$$
2. Montrer par récurrence sur n que f est une bijection (on montrera que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $f(p,q) = n$.

Exercice 10

Soit $f : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ une application croissante, c'est-à-dire

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

On suppose que f est une bijection

1. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.
2. Montrer que f est l'application identique (on pourra faire un raisonnement par l'absurde et considérer $A = \{n \in \mathbb{N} / f(n) \neq n\}$).

Exercice 11

1. Montrer que, pour tout (n,p) de $\mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \complement_n^k \complement_k^p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{si} \quad n > p \end{cases}$$
2. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle. On pose $y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$
$$(-1)^n x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_k.$$

Exercice 12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Calculer le cardinal de l'ensemble E des couples (i,j) d'éléments de $[1,n]$ tels que $i<j$.
2. En déduire le cardinal de l'ensemble E' des couples (i,j) d'éléments de $[1,n]$ tels que $i \le j$.
3. Retrouver la relation : $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 13

Soit E ensemble non vide et A partie de E fixe on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{llll} f: & P(E) & \to & P(A)\times P(\overline{A}) \\ & X & \to & (X\cap A, X\cap \overline{A}) \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective en déduire que :

$$(1) \quad \forall (n,m,p)\in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_m^{p-k} = \mathrm{C}_{n+m}^p, \ \ p\le n+m$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$ en fonction de n.

2. Montrer la relation (1) en calculant de deux manières $(1+x)^n(1+x)^m$.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\ge s0}$ la suite définie par la relation suivante :

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)$$

1. Montrer que pour tout n, le terme u_n est entier.
2. Monter que pour tout n, on a $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4u_n$.
3. Montrer que pour tout n, l'entier u_n est divisible par 2^n.

Exercice 15

(**Combinaisons avec répétitions**) Soit E un ensemble fini ayant n éléments ($n \ge 1$), et $\xi(E,r)$ (resp.$\xi'(E,r)$) l'ensemble des applications f de E dans l'intervalle $[0,r]$ de $\mathbb{N}$ telles que $\displaystyle\sum_{x\in E} f(x) \le r$ (resp. $\displaystyle\sum_{x\in E} f(x) = r$). Un élément de $\xi'(E,r)$ s'appelle parfois combinaison avec répétition de n objets r à r.

1. Choisissant un élément a de E, prouver que l'application :

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \xi'(E,r) & \longrightarrow & \xi(E\backslash\{a\},r) \\ & f & \longrightarrow & f_{/E\backslash\{a\}} \end{array}$$

est bijective.

2. En déduire la formule :

$$\mathrm{card}\xi(E,r) = \mathrm{card}\xi(E\backslash\{a\},r) + \mathrm{card}\xi(E,r-1)$$

3. Montrer que : $\mathrm{card}\xi(E,r) = \mathrm{C}_{n+r}^r$. (raisonner par récurrence sur $n+r$), calculer aussi $\mathrm{card}\xi'(E,r)$.
4. Montrer que le nombre de suites $(x_1,x_2,...,x_p)\in\mathbb{N}^p$ qui sont solutions en nombres entiers positifs de l'équation $x_1+x_2+...+x_p = n$ (p et n fixés) est C_{n+p-1}^n.

Exercice 16

Étant donné une progression arithmétique :

$$a_1, a_2 = a_1 + r, ..., a_i = a_{i-1} + r, ..., a_n = a_{n-1} + r$$

On pose

$$S_p = (a_1)^p + (a_2)^2) + ... + (a_n)^p$$

1. En développant pour $2 \le i \le n$, $(a_i + r)^{p+1}$ par la formule de binôme, trouver une relation entre $S_0, S_1, ..., S_p$.
2. Appliquer les calcules précédents que cas $a_1 = r = 1$ et démontrer

$$S_1 = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+...+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (S_1)^2$$

• • • • • • • • • • •