

Espaces vectoriels (2)

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$.
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n(x)$.
3. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, avec $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \neq \alpha, f_\alpha(x) = \frac{1}{x - \alpha}$.
4. $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, avec $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = |x - \alpha|$.

Exercice 2

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On pose :

$$E = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} / \forall x \in D, f(x) = \frac{P(x)}{x^3 - 1} \text{ et } P \in \mathbb{R}_2[X]\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Soient f, g et h des fonctions de E définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = \frac{x}{x^2+x+1}, h(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

Montrer que $B = (f, g, h)$ est une base de E .

3. Déterminer les coordonnées de la fonction $l : x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}$ dans cette base.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$. F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E définis par :

$$F_1 = \{(a, -b, a+b) / a, b \in \mathbb{R}\}$$

et

$$F_2 = \{(k, 2h+k, -2h) / h, k \in \mathbb{R}\}$$

1. Donner une base et la dimension de chacun de ces deux espaces.
2. Déterminer $F_1 \cap F_2$ et sa dimension m . et $F_1 + F_2$ et sa dimension n .
3. Vérifier que :

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$$

Exercice 4

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y) = (-x + y, x - 3y, 2x - 3y)$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f .
2. Déterminer $\dim \text{Ker } f$ et $\text{rg } f$ vérifier que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur a tel que la famille $(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E .

Exercice 6

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E . Montrer que si, pour tout x de E , les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires, f est une homothétie.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E .

Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ une base de E telle que $\{a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n\}$ soit une base de $\text{Ker } f$.

1. Montrer que $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)\}$ est une base de $\text{Im } f$.
2. En déduire que

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$$

Exercice 8

Étude des suites récurrentes : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

a et b étant deux nombres réels ($b \neq 0$), on considère l'ensemble S de suites $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels telles que : $(\forall n \geq 0), u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

On pose, pour $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in S$ et $r \in \mathbb{R}$.

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n) \text{ et } r(u_n) = (ru_n)$$

1^{re} partie : Structure vectorielle de S .

1. Démontrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace, sur $\mathbb{R}$, de toutes les suites réelles.
2. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \geq 0} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En déduire la dimension de S .

2^e partie : Détermination pratique des suites vérifiant : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite géométrique $(\lambda^n)_{n \geq 0} \in S$.
2. On désigne par λ et μ les racines de $x^2 - ax - b = 0$ et $\Delta = a^2 + 4b$

- a) Montrer que si $\Delta > 0$, alors les deux suites $(\lambda^n)_{n \geq 0}, (\mu^n)_{n \geq 0}$ forment une base de S .
- b) Si $\lambda = \mu$, montrer que $(n\lambda^n)_{n \geq 0} \in S$ et que les deux suites $(\lambda^n)_{n \geq 0}, (n\lambda^n)_{n \geq 0}$ forment une base de S .
- c) Si $\Delta < 0$, alors l'équation $x^2 - ax - b = 0$ a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Montrer que les deux suites $(r^n \cos n\theta)_{n \geq 0}, (r^n \sin n\theta)_{n \geq 0} \in S$ et qu'elles forment une base de S .

3^e partie : Applications.

1. Déterminer les suites vérifiant :

$$(1) \begin{cases} u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases}$$

2. Montrer que la suite définie par : $c_0 = 1, c_1 = e, c_{n+2} = \sqrt{c_{n+1}c_n}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x \cos t} dt$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n, I_{n-1}, I_{n-2} , en déduire l'expression de I_n . (On pourra calculer $I_n + I_{n-2}$)

Exercice 9

1. Montrer que le réel $\theta = \sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que la famille $(1, \theta, \theta^2)$ est libre dans $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
3. On désigne par F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $(1, \theta, \theta^2)$. Montrer que F est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel et un anneau.
4. Soit x un élément non nul de F . On considère l'application :

$$\varphi_x : \begin{matrix} F & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & xy \end{matrix}$$

- a) Montrer que φ_x est $\mathbb{Q}$ -linéaire.
- b) Montrer que φ_x est injective.
- c) En déduire que F est un corps. Montrer que F est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant le nombre réel θ .

Exercice 10

Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer qu'il existe un scalaire λ et un seul tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Si E est de dimension finie et $\lambda \neq 1$, montrer que $u - I_E$ est un automorphisme et calculer son inverse en fonction de u .

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

On pose $f^0 = id_E, f^k = f \circ f^{k-1}, N_k = \text{Ker } f^k, I_k = \text{Im } f^k, k \geq 1$.

1. Montrer que s'il existe un entier p tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_{p+1} = N_{p+2}$.
2. Montrer qu'il existe un unique $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$p \geq p_0 \implies N_p = N_{p_0}, \quad p < p_0 \implies N_p \subset N_{p+1} \text{ et } N_p \neq N_{p+1}$$

3. Montrer que : $E = I_{p_0} \oplus N_{p_0}$.

Exercice 12

On pose : $E = \mathbb{R}_n[X], n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer qu'un ensemble de polynômes de degrés respectifs $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ en forme une base de E .
2. f étant de degré n , on pose :
 $u_0 = f(X), u_1 = \Delta u_0 = f(X+1) - f(X), u_k = \Delta u_{k-1},$
 $1 \leq k \leq n.$

Calculer u_k en fonction de $\{f(X), f(X+1), \dots, f(X+n)\}$. Montrer que $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ et $\{f(X), f(X+1), \dots, f(X+n)\}$ sont des bases de E .

Exercice 13

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(n-k)!} X^{n-k}$. En particulier on a, pour $n = 1, 2, 3$:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}, a_3 = 0 \\ A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}, A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$$

1. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$(i) A_0 = 1 \quad (ii) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad A'_n = A_{n-1} \quad (iii) A_n(0) = A_n(1).$$

2. a) Dédurre de la propriété d'unicité de 1) que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n(X) = (-1)^n A_n(1 - X)$$

- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n(X+1) - A_n(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

- c) Soit n un entier impair et supérieur ou égal à 3. Montrer que A_n est divisible par $X(X-1)(2X-1)$ et que $a_n = 0$.

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, S_n(m) = \sum_{k=0}^m k^n$.

- a) Exprimer $S_n(m)$ en fonction de $A_n(m+1)$ et a_{n+1} .
- b) Déterminer $S_2(m)$.

4. Montrer que $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
 5. On considère les endomorphismes de E définis par :

$$\Delta : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & P' \end{matrix} \quad D : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & P(X+1) - P(X) \end{matrix}$$

- a)) Montrer que $D^{n+1} = \Delta^{n+1} = 0$ et que $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{D^k}{k!}$.
 b) Montrer que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 En déduire qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\Delta(Q) = D(P)$ et $Q(0) = P(0)$.
 c) On pose $u(P) = Q$. Montrer que $u \in GL(E)$.
 d) Montrer que : $\forall P \in E \quad u(P) = P(X) + \sum_{k=1}^n a_k [P^{(k)}(X) - P^{(k)}(0)]$.

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g deux endomorphismes de E .

Montrer que $rg(f+g) = rgf + rgg$ si et seulement si

$$\begin{cases} \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\} \\ E = \text{Ker } f + \text{Ker } g \end{cases}$$

Exercice 15

Déterminer le rang, une relation de dépendance linéaire liant les vecteurs du système S et une base de sous-espace vectoriel engendré par S dans les cas suivants :

- $S = \{(1, 1, 1, 3), (1, 2, -1, 2), (1, 2, 3, -2), (2, -1, 0, 3), (1, -1, 2, -2)\}$
- $S = \{(2 + 2t, -5t + 7, 9), (1 + t, 1, 2), (-2 - 2t, 3t - 5, 5 - 3t^2)\} \quad (t \in \mathbb{R})$
- $S = \{(a, 1, 1), (-1, b, -1), (-1, -1, a)\} \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -id_E$.

- Montrer que f est bijectif.
- On suppose que les $2p - 1$ vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{p-1})$ sont linéairement indépendantes.
 Montrer que les $2p$ vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{p-1}), f(x_p)$ sont linéairement indépendantes.
- On suppose que E est de dimension finie. Montrer que E possède une base de la forme $\{e_1, e_2, \dots, e_p, f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)\}$ et qu'il est de dimension paire.

Exercice 17

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la base constituée des trois polynômes $1, 1 + 2X$ et $X + X^2$.

Exprimer la base duale de cette base.

Même question pour la base constituée des trois polynômes : $1, X^2 - X$ et $X^2 - X$.

Exercice 18

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n + 1$ formes linéaires :

$$\varphi_k : P \longrightarrow P^{(k)}(0)$$

Montrer que la famille :

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

est une base de E^*

.....