SÉRIE $n°14$

Équations différentielles linéaires

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Dans les problèmes 1 à 5, trouver les points (x_0, y_0) pour lesquels le théorème d'existence et d'unicité garantit l'existence d'une solution unique.

1. $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$.
2. $y' = (1-x^2-y^2)^{\frac{7}{3}}$.
3. $y' = (y+x)^{\frac{1}{5}}$.
4. $y' = (1-x^2-2y^2)^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2

Considérons l'équation différentielle : $(E)\ \ y' = (y-1)^{\frac{1}{5}}$.

1. Vérifier que $y = \left(\dfrac{4}{5}x+c\right)^{\frac{5}{4}} + 1$ et $y = 1$ sont solutions de l'équation (E).
2. Montrer qu'il existe au moins deux solutions de (E) qui passent par (x_0, y_0) avec $y_0 = 1$.
3. Tracer le graphe de quelques solutions de (E), en incluant la solution $y = 1$.
4. Remarquer que $f(x,y) = (y-1)^{\frac{1}{5}}$ est continue sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$. Pourquoi cette remarque et 2) ne sont pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité ?

Exercice 3

Dans les exercices qui suivent, résoudre l'équation différentielle avec condition initiale.

1. $y' + 5y = 20,\ \ y(0) = 2$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.
3. $\dfrac{dT}{dt} = K(T-50), K$ constante, $T(0) = 200$.
4. $y'' + 2y' + 2y = 0, y(\frac{\pi}{4}) = 0, y'(\frac{\pi}{4}) = -2$.
5. $y' + \tan(x)y = \cos^2(x), y(0) = -1$.
6. $y'' + 4y = 3\sin(2x), y(0) = 2, y'(0) = -1$.

Exercice 4

Soit l'équation différentielle : $(E)\quad y'' - 2my' + y = 0$.

1. Quelle est la solution générale de (E) si $-1 < m < 1$?
2. Résoudre l'équation (E) lorsque $m = 1$.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle
$$(E)\quad (x-1)y'' + (2x-1)y' + xy = 0$$

1. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour que la fonction
$$y_0 : x \longmapsto e^{ax}$$
soit solution de (E).
2. Soit y une fonction deux fois dérivable. On pose $y = zy_0$ où y_0 étant la solution particulière de (E) trouvée dans 1).
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de (E) est que $u = z'$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on déterminera.
3. Résoudre cette dernière équation sur $]-\infty, 1[,]1, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les solutions de (E) sur $]-\infty, 1[,]1, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle :
$$xy'' + 4xy' + (2+x^2)y = 0 \quad (E)$$

1. Intégrer l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7

(**Applications**)

1) Désintégratin des corps radioactifs : L'étude expérimentale montre que les substances radioactives se désintègrent à un taux proportionnel à la quantité présente. c'est à dire, si $N(t)$ est le nombre d'atomes d'une substance radioactive présente à l'instant t, alors :
$$\frac{dN}{dt} = -kN \quad (1)$$
où k est une constante positive, appelée *constante de désintégration*.
La solution de (1) est :
$$N(t) = Ce^{-kt}$$
Si $N(0) = N_0$ est le nombre initial des atomes à l'instant $t = 0$, alors $N(t) = N_0e^{-kt}$.

PROF : M.TARQI

À partir de cette équation on peut déterminer le temps t que met la substance pour se désintégrer de la quantité N_0 à $N(t)$, en effet :

$$t = \frac{-1}{k} \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \quad (2)$$

la formule (2) est utilisée en Archéologie, Paléontologie, Géologie et en Art pour trouver l'âge des vieux objets (pierres, fossiles, pièces d'art,etc...)
Pour trouver la constante k, on utilise la *demi-vie* de la substance radioactive, c'est à dire la durée T que met la moitié de la substance pour se désintégrer. On trouve

$$T = \frac{-1}{k} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad k = \frac{\ln 2}{T}$$

Exemples :

1. Un isotope radioactif a une demi vie de 16 jours. Trouver la quantité de la substance radioactive nécessaire pour avoir $30g$ à la fin de 30 jours ?
2. Un isotope radioactif est resté dans laboratoire pendant 10 ans sans être utilisé. Une mesure expérimentale montre que la substance contient 80% de la quantité radioactive initiale.
   a) Trouver la demi-vie de cet isotrope.
   b) Dans combien d'années 85% de la quantité radioactive initiale aura-t-elle disparu ?

2) Loi de refroidissement de Newton : Au cours de l'enquête sur un meurtre ou une mort accidentelle, il est important de connaître l'heure où la mort a eu lieu. À partir d'observations expérimentales, on établit que la température de la surface du corps change proportionnellement à la différence entre la température du corps et celle du milieu environnant. Soit $\theta(t)$ la température de l'objet à l'instant t et T celle du milieu, alors θ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T) \quad (*)$$

où k est une constante positive.
Supposons qu'un corps est découvert à l'instant $t = 0$, et que sa température est égale à θ_0. Si la mort a lieu à l'instant t_m, alors la température du corps est égale à $\theta_m = 37°C$.
La résolution de l'équation $(*)$ donne :

$$\theta(t) = T - (\theta_0 - T)e^{kt}$$

Pour déterminer k, il suffit de mesurer la température θ_1 du corps à un moment ultérieur $t_1 > 0$. En effet :

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)e^{-kt_1}$$

d'où

$$k = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right)$$

et par conséquent, le temps de la mort t_m est donné par :

$$t_m = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right)$$

Exemples :

1. Supposons que la température d'un corps est de $23,4°C$ quand on l'a découvert et que la température du milieu ambiant est $6,4°C$. Deux heures plus tard, la mesure de la température du corps donne $12,4°C$. Trouver l'heure de la mort a eu lieu.
2. La température d'un moteur à l'arrêt après fonctionnement est $200°C$. Celle de l'air libre est $30°C$. Après 10 minutes, la température de la surface du moteur est $180°C$.
   a) Dans combien de temps la température du moteur sera-t-elle de $40°C$?
   b) À une température $T \in [30°C, 200°C]$, on associe $t(T)$ qui est le temps nécessaire que met le moteur pour refroidir de $200°C$ à T. Trouver la forme qui donne $t(T)$ et tracer son graphe

3) Mouvement rectiligne : La loi fondamentale de la Mécanique classique dit qu'un objet de masse m se déplace avec une accélération $\vec{\gamma}$ liée à la résultante $\vec{R}$ des forces appliquées à l'objet suivant la formule

$$m\vec{\gamma} = \vec{R} \quad (*)$$

Cette formule vectorielle se réduit à une équation algébrique dans le cas d'un mouvement rectiligne. Par exemple, soit une masse m se déplaçant sur l'axe Ox et $x(t)$ la distance de la masse à l'origine à l'instant t. Alors l'accélération est donnée par la formule $\frac{d^2x}{dt^2}$. On déduit que l'équation $(*)$ se réduit par une équation différentielle du second ordre.
On rappelle que la vitesse est donnée par la formule $\frac{dx}{dt}$.

Exemple : Une masse m, se déplaçant librement sur l'axe Ox, est attirée par l'origine suivant une force proportionnelle à la distance à l'origine. Trouver l'équation du mouvement dans les deux cas suivants :

1. si les conditions initiales sont $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$,
2. si la vitesse initiale est $v(0) = v_0$.

Exercice 8

Une équation de **Bernoulli** est une équation différentielle non linéaire du premier ordre de la forme :

$$(E) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

où p et q sont des fonctions définies sur un intervalle I et α est un réel ($\alpha \neq 0$ et 1)

1. Soit y une fonction dérivable et ne s'annule pas sur I. On pose $v = y^{1-\alpha}$
   Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que y soit solution de (E) est que v vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.
   Remarques :
   • Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, l'équation (E) est linéaire et pourrait alors être résolue par la méthode générale.
   • La fonction $y = 0$ est une solution de l'équation (E).

2. Résoudre les équations différentielles

a) $\dfrac{dy}{dx} = y + y^3$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = 3y - y^2$.

c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3 y^{\frac{3}{2}}, y(1) = 1$.

Exercice 9

Une équation d'**Euler-Cauchy** est une équation différentielle non linéaire du second ordre de la forme :

$$(E) \ \ x^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

où a, b et c sont des constantes réelles.

1. Considérons le changement de variable $x = e^t$, où $t = \ln x$.

   Soit y une fonction deux fois dérivable, montrer que la fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $t \longmapsto v(t) = y(e^t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (b-1)\frac{dv}{dt} + cv = 0$$

2. Résoudre les équations différentielles

a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4xy' + 2y = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$.

b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$.

c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2xy' + 2y = 1$.

Exercice 10

Résoudre le système différentiel de la variable t :

$$\begin{cases} x'(t) = 3y(t) - x(t) \\ y'(t) = 2y(t) \\ z't) = 2x(t) + y(t) - z(t) \end{cases}$$

Exercice 11

Le mouvement d'un point pesant soumis à une résistance du milieu est défini par l'équation différentielle

$$mv' = -kv^2 + mg \qquad (E)$$

où v est la vitesse du point pesant de masse m, $-k$ représente la résistance du milieu. (On suppose dans tout ce qui suit $k \neq 0$).

1. Rechercher la solution particulière v_0 de l'équation différentielle (E), telle que v_0 soit une constante.

   Dans les questions suivantes, on suppose : $m = \dfrac{1}{2}$, $g = 10$ et $k = 5$.

2. En posant $v = V + v_0$, où v_0 est la valeur déterminée au 1., montrer que V vérifie l'équation différentielle

$$V' + 20V + 10V^2 = 0 \qquad (1)$$

3. En posant $u = \dfrac{1}{V}$ dans l'équation différentielle (1), montrer que u vérifie une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, notée (2).

4. Intégrer (2), puis déterminer u, V et v telles qu'en $t = 0$, $v(0) = 2$.

• • • • • • • • • • •