SÉRIE $n^\circ 15$

# Matrices et systèmes linéaires

Année scolaire 05/06

## Exercice 1

Inverser les matrices suivantes ($a \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouver la matrice de passage $P$ de la base $B = (a_1, a_2, a_3)$ à la base $B' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ définie par :

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_1 + a_2, \quad a'_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

Déterminer $P^{-1}$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ trouver la matrice de passage $P$ de la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$ à la base $(e_1, e'_2, e'_3)$ définie par :

$$e'_1 = (0,1,1), \quad e'_2 = (1,0,1), \quad e'_3 = (1,1,0)$$

Déterminer $P^{-1}$.

## Exercice 3

On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

comme la matrice d'une application d'un endomorphisme $f$ de $\mathbb{C}^3$ relativement à la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$. Trouver la matrice de $f$ par rapport à la base $(e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

## Exercice 4

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Á l'aide de la formule binomiale, montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, il existe des entiers rationnels $a_n$ et $b_n$ satisfaisant à la relation : $M^n = a_n M + b_n I_3$.

## Exercice 5

Trouver le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 3i & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## Exercice 6

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 7

Considérons les deux matrices réelles suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $I_1^2, \ I_2^2, \ I_1 I_2, \ I_2 I_1$
2. Montrer que les deux matrices $I_1$ et $I_2$ sont linéairement indépendantes.
3. Déterminer $I_1^{-1}$ et $I_2^{-1}$ s'elles existent.
4. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M(a,b) = aI_1 + bI_2$.
   a) Calculer $M(a,b)M(a',b')$.
   b) Déterminer $a$ et $b$ de tel sorte que $M(a,b)$ soit inversible, et déterminer $[M(a,b)]^{-1}$.
   c) Écrire $[M(a,b)]^{-1}$ en fonction de $I, \ I_1, \ I_2$.

## Exercice 8

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ on considère l'endomorphisme $f$ dont la matrice, par rapport à la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$, est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

PROF : M.TARQI

1. Démontrer que $f^3 = 0$.
2. A tout réel $t$, on associé l'application linéaire $g_t = i + tf + \frac{1}{2}t^2f^2$ où $i$ est l'application identique. Déterminer les matrices de $g_t$, $g_t \circ g_{t'}$ $(t,t' \in \mathbb{R})$ dans la base canonique. En déduire que $g_t$ est inversible et déterminer la matrice de son inverse.
3. On pose $e'_1 = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$, $e'_2 = f(e_1)$, $e'_3 = f(e_2)$, démontrer que $(e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $f$ dans cette base.

## Exercice 9

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. On se donne une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $E$ et on définit l'endomorphisme $u$ de $E$ par :

$$u(e_i) = \left(\sum_{j\neq i} e_j\right) + ae_i$$

où $a$ est un paramètre.

1. Déterminer la matrice de $u$ relativement à la base $\mathcal{B}$
2. Déterminer $\operatorname{Im} u$ pour $a = 1$, en déduire $\dim \operatorname{Ker} u$, $u$ est-il inversible ?
3. Montrer que $e = e_1 + e_2 + ... + e_n \in \operatorname{Ker} u$ pour $a = 1 - n$, $u$ est-il inversible ?
4. On prend $n = 3$ et $a = -2$. Montrer que les vecteurs

$$u = e_1 + e_2 + e_3, \quad v = -e_2 + e_3, \quad w = e_1 - e_2$$

forment une base de $E$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à cette base, en déduire la matrice de $u$ dans cette base.

## Exercice 10

Soit $M$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer $M.{}^tM$. En déduire que $M$ est inversible si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, donner $M^{-1}$.

## Exercice 11

Le plan affine $(P)$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application de $(P)$ dans $(P)$ qui, au point $M(x,y)$, associe le point $M_1(x_1, y_1)$, tel que :

$$M_1 = f(M) \Longleftrightarrow X_1 = LX + A$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \; et \; A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On désigne par $M_n(x_n, y_n)$ l'image de $M(x,y)$ par l'application composée $f^n = f \circ f \circ f \circ ... \circ f$ et l'on pose $X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$

1. Définir, sous forme matricielle, les applications $f^2$ et $f^3$. En déduire les définitions de $f^4$, $f^5$ et $f^6$. Que peut-on dire de $f^6$.
2. Donner les équations cartésiennes qui définissent $f, f^2, f^3, f^4, f^5$ et $f^6$. Construire les images $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ et $M_6$ du point $M(1,1)$ par ces six applications.

## Exercice 12

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice $A$ la somme des coefficients de $A$ :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à zéro et $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que

$$fg - gf = id_E$$

Démontrer que $E$ n'est pas de dimension finie. Donner un exemple.

## Exercice 13

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 31 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

## Exercice 14

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^3y = c^3 \end{cases}$ $(a, b, c$ réels, $a \neq b, a \neq c, b \neq c)$
2. $\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$ $(m \in \mathbb{R})$
3. $\begin{cases} 2x + \lambda y - z = 3 \\ (\lambda - 5)x + 3y + 7z = 7 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$
4. $\begin{cases} x_1 + mx_2 + mx_3 + mx_4 = a \\ mx_1 + x_2 + mx_3 + mx_4 = b \\ mx_1 + mx_2 + mx_3 + x_4 = c \\ mx_1 + mx_2 + mx_3 + x_4 = d \end{cases}$ $(m, a, b, c, d$ réels)
5. $\begin{cases} ax_1 - bx_2 = \alpha \\ cx_2 - ax_3 = \beta \\ -cx_1 + bx_3 = \gamma \end{cases}$ $(a, b, \alpha, \beta, \gamma$ réels)

## Exercice 15

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les systèmes à $n$ inconnues suivant :

$x_2 = ax_1 + b, x_3 = ax_2 + b, ..., x_n = ax_{n-1} + b, x_1 = ax_n + b$

où $a$ et $b$ sont des réels

## Exercice 16

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}, \; v_{n+1} = 3v_n + 2w_n, \; w_{n+1} = v_n + 2w_n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
   b) Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que pour, tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^1$.
   c) En déduire $v_n$, $w_n$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

## Exercice 17

On considère le sous-ensemble $T$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ décrit par las matrices de types

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

on désigne par $T_+$ le sous-ensemble de $T$ décrit par les matrices $A$ telles que $a > 0$, $b > 0$.

1. Calculer $A^2$, $A^3$,...,$A^p$ et la matrice $B_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$.
   Démontrer que $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$, $(\gamma_n)_n$ ont des limites $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ que l'on calculera, lorsque $n$ tend vers l'infini. On posera :
   $$B = f(A) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$
   ( on distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$ )
2. L'application $f$ de $T$ dans $T$ ainsi définie est-elle linéaire ? est-elle injective ? est-elle surjective ?
   Démontrer que $f$ considérée comme application de $T$ dans $T_+$ est bijective.
3. $B = f(A)$ étant telle que $0 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 2$, montrer que si l'on pose :
   $$A_n = \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^{q-1}}{q} (B - I_2)^q = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$$
   $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ ont pour limites respectives $a$, $b$, $c$.

•••••••••••