

Déterminants

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 12 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -7 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2Donner une expression aussi simple que possible des déterminants à éléments dans $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2b & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

Vérifier que : $\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \tan \frac{\alpha}{2} \\ 1 & \cos \beta & \tan \frac{\beta}{2} \\ 1 & \cos \gamma & \tan \frac{\gamma}{2} \end{vmatrix} = 0$, avec α, β, γ des réels compris entre 0 et π et de somme π .

Exercice 4pour tous $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on note :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(déterminant de **VANDERMONDE** de $a_1, a_2, \dots, a_n$).Montrer que $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Dans les exercices suivants (11 à 15), on cherche une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1} ou entre D_n, D_{n-1}, D_{n-2} .

Exercice 5Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 6Soient $x \in \mathbb{K}$, $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant, d'ordre $n+1$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 7Calculer $D_{n,m}$ ($n \geq m-1$, $\mathbb{C}_n^p$ coefficient binomial).

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbb{C}_n^1 & \mathbb{C}_n^2 & \dots & \mathbb{C}_n^{m-1} \\ 1 & \mathbb{C}_{n+1}^1 & \mathbb{C}_{n+1}^2 & \dots & \mathbb{C}_{n+1}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathbb{C}_{n+m-1}^1 & \mathbb{C}_{n+m-1}^2 & \dots & \mathbb{C}_{n+m-1}^{m-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 8Calculer le déterminant $D_n(x)$, d'ordre n , dont tous les coefficients sont égaux à 1 sauf ceux de la diagonale principale égaux à $1+x$.**Exercice 9**Calculer le déterminant $D_n(x)$, d'ordre n , dont tous les coefficients sont égaux à x sauf ceux de la diagonale principale égaux à -1 .**Exercice 10** (r_k) étant une famille de n éléments de $\mathbb{K}$, on pose :

$$f(x) = (r_1 - x)(r_2 - x) \dots (r_n - x).$$

et on appelle D_n le déterminant, d'ordre n , dont la k -ième ligne est

$$b \dots b \ r_k \ a \dots a$$

 r_k est sur la diagonale principale.

1. Si $a \neq b$, calculer D_n . (Indication : on pourra considérer le déterminant $D_n(x)$ obtenu à partir de D_n en ajoutant x à chaque terme, et montrer que $D_n(x)$ peut se mettre sous la forme $Ax + B$.)
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. calculer D_n si $a = b$.
3. Si $a = b$ et $\mathbb{K}$ quelconque, calculer D_n .

Exercice 11

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres complexes ($n \geq 2$), on pose :

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ avec } \alpha_{i,j} = a_j^{i-1}$$

et

$$K_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, \text{ avec } \beta_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i+1} & \text{si } j \geq i \\ a_{n+j-i+1} & \text{si } j < i \end{cases}$$

on pose enfin :

$$U_n = V_n(1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}), \text{ avec } w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Par exemple : $K_3(a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$ et $U_4 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{\substack{i < j \\ 1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n}} (a_j - a_i).$

2. Calculer $U_n \overline{U}_n$ ($\overline{U}_n$ la matrice conjuguée de U_n). En déduire que U_n est inversible, et déterminer U_n^{-1} . Calculer $|\det U_n|^2$, puis $|\det U_n|$.
3. a) On pose $c_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$. Calculer c_n en remarquant que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = 2c_n + 2 \sum_{i=1}^n i.$$

- b) En utilisant ce qui précède, ainsi que l'égalité : $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{\frac{i\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2}$, montrer qu'un argument de $\det U_n$ est $(3n-2)(n-1)\frac{\pi}{4}$.

4. Dans cette question, $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des complexes quelconques. On leur associe le polynôme ϕ défini par :

$$\phi(z) = b_1 + b_2 z + \dots + b_n z^{n-1}.$$

- a) Calculer la matrice $K_n(b_1, b_2, \dots, b_n)U_n$. En posant :

$$K_n(b_1, b_2, \dots, b_n)U_n = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

on exprimera simplement $\gamma_{i,j}$ à l'aide de $w_n^{(i-1)(j-1)}$ et de $\phi(w_n^{j-1})$.

- b) Calculer $U_n^{-1} K_n(b_1, b_2, \dots, b_n)U_n$. En déduire $\det K_n(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

.....