

## Intégration sur un segment

Année scolaire 05/06

## Exercice 1

Soient  $u$  et  $v$  les zéros du polynôme  $x^2 - x + \frac{1}{10}$ . Vérifier que, pour tout polynôme  $P$  dont le degré n'excède pas 5, on a :

$$(1) \int_0^1 P(t)dt = \frac{1}{18} \left( 5P(u) + 8P\left(\frac{1}{2}\right) + 5P(v) \right).$$

## Exercice 2

Soit  $f$  une fonction continue sur le segment  $[a, b]$ , à valeurs positives; soit  $\mathcal{C}$  le graphe de  $f$  dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé; soit  $\Delta$  la partie du plan limitée par  $\mathcal{C}$  et par les droites  $y = 0$ ,  $x = a$  et  $x = b$ .

Le naturel  $n$  étant donné, on partage  $\Delta$  en  $n$  domaines d'aires égales en utilisant des parallèles à l'axe  $(Oy)$  dont on désigne les abscisses par

$$a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$$

Étudier la suite dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

## Exercice 3

Étudier la suite dont le terme  $u_n$ , de rang  $n$ , est :

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) & \quad b) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \\ c) \left[ \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k) \right]^{\frac{1}{n}} & \quad d) \sum_{i=1}^n \frac{1}{na + ib}, \quad a, b > 0 \end{aligned}$$

## Exercice 4

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, 1]$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ . Déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

## Exercice 5

$E$  désigne l'ensemble des fonctions continues sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ , qui ne prennent que des valeurs strictement positives. Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à la fonction  $f$  de  $E$ , associe

$$\varphi(f) = \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \right)$$

1. Montrer que  $\varphi(E)$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $\varphi(E)$  admet une borne inférieure et trouver toutes les fonctions  $f$  de  $E$  telles que  $\varphi(E)$  est égal à cette borne inférieure.

## Exercice 6

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que :  $e^2 < a < b$ . Montrer que

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \frac{2b}{\ln b}.$$

## Exercice 7

Calculer l'intégrale  $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2 x} \arcsin(\sqrt{t})dt$ .

## Exercice 8

Calculer les primitives de  $f(x) = \frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n}{n-1}+1}}$ .

$$f(x) = \frac{\cos x + 2 \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

## Exercice 9

**Partie I :** Quelques propriétés des intégrales de WALLIS

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx.$$

Le but de cette partie est de d'établir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

1. Prouver la relation de récurrence :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$  pour tout  $n \geq 0$ .
2. En déduire que  $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$  et en conclure que  $I_{n+1} \sim I_n$ .
3. Montrer, par récurrence, que

$$(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

4. Conclure.

**Partie II :** Le but de cette partie est de prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1. Établir que pour tout  $v \geq -n \Rightarrow (1 + \frac{v}{n})^n \leq e^v$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire, pour tout  $t \in [0, \sqrt{n}]$ , que :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

3. Montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) dt = \sqrt{n} I_{2n+1}$$

(poser  $t = \sqrt{n} \sin \theta$ ).

4. Montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{-n}\right) dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

(poser  $t = \sqrt{n} \tan \theta$ ).

5. Conclure.

### Exercice 10

Soit  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ , trouver un développement limité de  $I_n$  à l'ordre 2 en  $\frac{1}{n}$ ; généraliser.

### Exercice 11

Calculer  $\int P(x)e^{ax} dx$  où  $P$  est une fonction polynôme de degré  $n$ . Appliquer à  $\int x^3 e^{2x} dx$ .

### Exercice 12

Calculer les primitives :  $\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$ ,  $\int \frac{x^4 + 4x}{(x^2 - 1)} dx$ ,  $\int \frac{dx}{x^4 + 4x + 1}$ ,  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \sin 2x} dx$ .

### Exercice 13

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable; pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on considère  $I_n = \int_a^b f(x)e^{inx} dx$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ . On considérera d'abord les cas d'une fonction en escalier; on étudiera de même les limites de

$$J_n = \int_a^b f(x) \cos nx dx \text{ et de } K_n = \int_a^b f(x) \sin nx dx.$$

### Exercice 14

Soit  $f$  une fonction continue positive sur  $[a, b]$ . On désigne par  $M$  la borne supérieure de  $f$  sur  $[a, b]$ .

1. Montrer que  $\left[\int_a^b f^n(x) dx\right]^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ .
2. Montrer que :

$$\forall \lambda > 0, \exists \eta > 0 : \left[\int_a^b f^n(x) dx\right]^{\frac{1}{n}} \geq \eta^{\frac{1}{n}}(M - \lambda).$$

En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b f^n(x) dx\right]^{\frac{1}{n}} = M.$$

### Exercice 15

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t) dt$ .

### Exercice 16

Soit  $f$  une fonction strictement croissante, continue sur  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) et  $f(0) = 0$ . On pose  $g = f^{-1}$ .

1. On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0, a]$  par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(t) dt - xf(x).$$

Montrer que  $F$  est dérivable et a une dérivée nulle;

- a) en supposant que  $f$  est dérivable;
- b) en utilisant la définition de la dérivée, dans le cas général.

2. Montrer que pour tout  $(u, v) \in [0, a] \times [0, f(a)]$  on ait :

$$uv \leq \int_0^u f(t) dt + \int_0^v g(t) dt$$

En déduire que si  $p > 1$  et  $q > 1$  alors :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

### Exercice 17

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n f(t) dt = f(1).$$

### Exercice 18

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue.  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  une subdivision de  $[0, 1]$  telle que :  $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) dt = c$  ( $c$  constante)

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{\int_0^1 t f(t) dt}{\int_0^1 f(t) dt}.$$

### Exercice 19

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$ , ( $a < b$ ).

1. Montrer que l'inégalité de SCHWARZ est une égalité si et seulement si  $f$  et  $g$  sont liées.
2. Montrer que

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Inégalité de Minkowski.

### Exercice 20

Méthode de trapèzes : La méthode de trapèzes appliquée à  $\int_a^b f$  relativement à la subdivision  $\sigma = (a_i)_{i \in [0, n]}$  consiste à prendre pour valeur approchée de cette intégrale :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) \right).$$

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$ , montrer que :

$$\left| \int_a^b f - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

**Exercice 21**

1. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions sur  $[a, b]$ . On suppose que  $g$  est positive et non identiquement nulle sur  $[a, b]$ .  
démontrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

2. **Application** : Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, \pi]$ .  
Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^\pi f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

.....