SÉRIE $n°20$

Intégration sur un intervalle quelconque

Année scolaire 05/06

Exercice 1

On donne la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$

1. Démonter que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existent.
2. Pour $x > 0$ on définit la fonction F par $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   Effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $F(x)$.
   Calculer $F(x) - F(\dfrac{1}{x})$; en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2

1. Pour x réel positif et n entier naturel, on pose :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$$
   et
$$S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - ...(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$
   Montrer que $F(x)$ existe et est compris entre $S_n(x)$ et $S_{n-1}(x)$.
2. Utiliser ce résultat pour calculer une valeur approchée de $F(5)$, avec une erreur absolue aussi petite que possible.

Exercice 3

1. À tout couple (a,b) de réels positifs ou nuls $(0 < a < b)$, on associe les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par :
$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   et
$$\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
2. Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent et ont la mÃªme limite. Cette limite qui est en fonction de (a,b), et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $l(a,b)$
3. Former une relation simple entre les intégrales
$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$
$$J(a,b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$
   Faire dans $J(a,b)$ le changement de variable $u = \dfrac{ab-t^2}{2t}$ et en déduire
$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = ... = I(a_n,b_n)$$
4. Exprimer $l(a,b)$ en fonction de $I(a,b)$.

Exercice 4

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente. C'est-à-dire $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\mathrm{d}t$ converge et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\cos t}\right|\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 5

Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^3}\mathrm{d}t$ existe. Calculer sa valeur.

De mÃªme pour l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\ln(1-t^2)\mathrm{d}t$.

Exercice 6

Existence et calcul de l'intégrale de GAUSS $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

1. On pose :
$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
   Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $G'(x)$ et en déduire une expression de $G(x)$ en fonction de $F(x)$.
2. Conclure.

Exercice 7

On donne une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}\mathrm{d}t$$
f_n étant considérée comme intégrale d'une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$.

1. a) Calculer $f_n(0)$.
   b) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f_n.
   c) Indiquer si f_n est paire ou impaire.
2. On suppose dans cette question que n est strictement positif.

Prof : M.TARQI

a) Démontrer que pour tout entier k strictement positif, il existe $k+1$ nombres $a_{0k}, a_{1k}, ..., a_{kk}$, tels que pour tout x réel

$$\cos^k x = \sum_{p=0}^{k} a_{p,k} \cos px.$$

Calculer a_{kk}. En déduire pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ la valeur de l'intégrale

$$I_k = \int_0^{\pi} \cos^k t \cos nt \mathrm{d}t.$$

b) Démontrer que pour x de $\mathcal{D}$, il existe une fonction ε_x qu'on déterminera telle que pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\frac{1}{1 - x\cos t} = 1 + x\cos t + ... + x^n \cos^n t + x^n \varepsilon_x(t)$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon_x(t) = 0$.

c) Utiliser les résultats précédents pour donner le développement limité de f_n en 0 à l'ordre n.

3. a) Calculer $f_0(x)$ en effectuant soigneusement le changement de variable $u = \tan \dfrac{t}{2}$. Calculer $xf_1(x)$ en fonction de $f_0(x)$; en déduire $f_1(x)$.

   b) Pour tout $x \in \mathcal{D}$ exprimer $x[f_{n+2}(x) + f_n(x)]$ en fonction de $f_{n+1}(x)$.

4. On prend $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

   a) Montrer que $f_0(\sin\alpha) = \dfrac{\pi}{\cos\alpha}$.

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{2}{\sin\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n(\sin\alpha) \\ f_{n+1}(\sin\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(\sin\alpha) \\ f_{n+2}(\sin\alpha) \end{pmatrix}$$

   c) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{2}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$. Soient $V_1 = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, en déduire la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$, avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
   Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire $f_n(\sin\alpha)$.

5. Calculer $f_n(x)$.

Exercice 8

Pour $a \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x} \mathrm{d}x$$

1. Calculer $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$; en déduire $I_n(\pi)$ pour tout n.
2. Pour $a \in]0, \pi[$, comparer $I_n(a)$ et $I_n(\pi - a)$; montrer que
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$$
puis que
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}.$$
3. Déterminer
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x} \mathrm{d}x$$
et en déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

Exercice 9

1. Variation de la fonction f déterminée par : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$.
2. Relation entre $f(x)$ et $f(x-2)$.
3. Calculer $f(n)$, pour n naturel.
4. Montrer que la fonction g déterminée par
$$g(x) = xf(x)f(x-1)$$
admet la période 1; en déduire qu'il s'agit d'une constante.
5. Montrer que $f(x) \simeq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$. au voisinage de $+\infty$.

••••••••••