

Espace euclidiens

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soient E et F deux espaces préhilbertiens réels, $f : E \rightarrow F$ une application telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Démontrer que l'application f est linéaire.

Exercice 2

Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace orienté, ($\vec{a} \neq 0$), et k un réel quelconque.

- Déterminer les vecteurs $\vec{x}$ tels que : $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$. On cherchera d'abord une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{x}_0 = \lambda \vec{a}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), puis on donnera la solution générale.
- Déterminer les vecteurs $\vec{x}$ tels que : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$
- Montrer que le système

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{x} = k \\ \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \end{cases} \text{ avec } \vec{a} \neq 0 \text{ et } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

admet une solution unique.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 ainsi que a, b deux vecteurs non nuls de E .

On considère l'application f de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = (a|x)a + b \wedge x.$$

Quel est le rang de f .

Exercice 4

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Montrer que la matrice dans une base orthonormée de f est une matrice symétrique.

Réciproquement, montrer que si la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, alors elle l'est dans n'importe quelle base orthonormée et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Exercice 5

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E . Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E , on suppose que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Montrer que la matrice de f dans toute base orthonormale est antisymétrique et que :

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y)).$$

Exercice 6

Soient E un espace euclidien ainsi que f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormale de E sont respectivement symétrique et antisymétrique.

Montrer que :

$$\forall x \in E, (f(x)|g(x)) = 0$$

puis que :

$$\forall x \in E, \|(f - g)(x)\| = \|(f + g)(x)\|.$$

Exercice 7

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans une base canonique de la rotation

d'angle θ autour du vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Donner la matrice relativement à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E de :

- la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.
- la rotation autour de la droite dirigé et orientée par le vecteur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 9

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) = 0$. Que dire de u ?

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim(E) \geq 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{Tr}(u) = 0$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

- Calculer $\text{Tr}(u)$ à l'aide de cette base orthonormale.
- Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $(e_i|u(e_i))$ et $(e_j|u(e_j))$ sont de signes différents.
- Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $e(\theta) = (\cos \theta)e_i + (\sin \theta)e_j$. Prouver que $e(\theta)$ est unitaire.
- Soit $g(\theta) = (e(\theta)|u(e(\theta)))$. Prouver qu'il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $g(\theta) = 0$.
- En déduire qu'il existe une base orthonormale de E telle que la matrice de u dans cette base a tous ses coefficients sur la diagonale nuls

Exercice 11

Soient f et g deux rotations vectorielles qui ne sont pas des retournements. Montrer que f et g commutent si et seulement si elles ont le même axe.

Exercice 12

Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E , dont la matrice A relativement à une base orthonormée directe (i, j, k) de E est donnée, et préciser les éléments caractéristiques de f .

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \frac{-1}{27} \begin{pmatrix} 2 & -26 & 7 \\ -23 & 2 & 14 \\ 14 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

.....