

ESPACES VECTORIELS NORMÉS (1)

Exercice 1 Soit p une semi-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire il manque juste l'axiome $p(A) = 0 \implies A = 0$). On suppose de plus que $\forall (A; B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, p(AB) \leq p(A)p(B)$. Montrer que $p = 0$ ou p est en fait une norme.

Exercice 2 Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ les normes sur E définies par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que f de $E, \|f\|_1 \leq \|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
2. Démontrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 3 Montrer que, dans un espace vectoriel normé, toute boule ouverte (resp. fermée) est convexe.

Exercice 4 On pose $l^\infty = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. Pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$, nous posons

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{4^n} \text{ et } \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

1. Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes dans l^∞ , sont-elles équivalentes ?
2. (E, N) est-il complet ?
3. (E, N) et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont-ils compacts ?
4. Les boules unités sont-elles compactes ?

Exercice 5 Normes de Hölder sur $\mathbb{K}^n$. Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in]1, +\infty[, q = \frac{p}{p-1}$, donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On note $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et de même pour $\|\cdot\|_q$.

2. Montrer, que pour $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$:

$$(a) \left| \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \text{ où } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

$$(b) \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, appelée norme de Hölder.
4. Montrer, que tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$, la suite $(\|x\|_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers $\|x\|_\infty$, où $\|x\|_\infty = \max_{k \in [1, n]} |x_k|$.
5. Dessiner les "boules unités" de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $p \in \{\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, +\infty\}$.
6. Montrer que si $0 < p < 1, \|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geq 2$).

Exercice 6 1. Soit $(A_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que la réunion des A_n est encore une partie ouverte ? Et leur intersection ?

2. Même question pour une famille de parties fermées.

Exercice 7 Déterminer si chacune des parties suivantes du plan sont ouvertes ou fermées, ou ni l'un ni l'autre. Déterminer chaque fois l'intérieur et l'adhérence.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 y^2 > 1\},$

2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X] : N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$. Montrer que

1. N_a est une norme.
2. N_0 et N_1 sont équivalentes.
3. Si $a, b \in [0, 1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.
4. Soit $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et quelle est sa limite.
5. Si $0 \leq a < b$ et $b > 1$ alors aucune des normes N_a, N_b n'est plus fine que l'autre.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel normé réel et A, B deux parties de E . On note

$$A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$$

Si A est ouvert (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouvert de E .

Exercice 10 Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Exercice 11 Soit $A = \left\{ \left(t, \sin \frac{1}{t} \right) \in \mathbb{R}^2 / t > 0 \right\}$. Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ de A .

Exercice 12 Soit F un sous-espace vectoriel de E , espace vectoriel normé.

1. Montrer que son adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. En déduire qu'un hyperplan est soit fermé soit dense dans E .

Exercice 13 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ et $N : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], N(P) = \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. $(\mathbb{C}[X], N)$ est-il complet.

Exercice 14 TOPOLOGIE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
4. Soit $p \in [0, n]$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}_p$ des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Propriétés topologiques de l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que la forme quadratique $(x, y) \longmapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit définie positive ?
7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices stochastiques (matrices $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{ij} \geq 0$ et $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$) est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

• • • • •