ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1 Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres pour la matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les termes sont nuls, sauf les termes suivantes égaux à 1 :

$$a_{1,1}, a_{n,2}, a_{n-1,3}, a_{n-2,4}, ..., a_{2,n}.$$

Exercice 2 Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ euclidien défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

Déterminer la projection orthogonale sur F et pour $x \in F$, calculer $d(x, F)$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel euclidien orientè de dimension 3 et $u \in E$ un vecteur non nul. On considère l'application de E dans E définie par :

$$f : x \mapsto u \wedge x$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer l'image le noyau.
3. Déterminer f^*.
4. Montrer que f^2 est diagonalisable et déterminer son spectre.

Exercice 4 On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Tr}({}^tXY)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ_A l'application définie par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \varphi_A(X) =^t AXA$$

Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer l'adjoint $(\varphi_A)^*$ de φ_A.

Exercice 5 Trouver a, b des réels tels que $\displaystyle\int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2\,dt$ soit minimal.

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On note $w = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan π et S la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Donner une base (u, v) du plan π et justifier, sans calcul, que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice S' de la symétrie s dans la base (u, v, w).
3. En déduire la matrice S.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (de dimension finie), si $u \in E\backslash\{0\}$ on note par s_u la symétrie orthogonale parallèlement à $\mathbb{R}u$.

1. Montrer que
$$\forall x \in E,\ \ s_u(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$
2. Soit $u, v \in E\backslash\{0\}$ et $\rho_{u,v}$ l'endomorphisme de E défini par
$$\rho_{u,v}(x) = x - (v|x)u, \forall x \in E.$$
   (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\rho_{u,v}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit diagonalisable.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.
3. (a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\rho_{u,v}$.
   (b) Montrer que pour tout vecteur non nul u, il existe un unique vecteur non nul, noté $\hat{u}$, tel que $\rho_{u,\hat{u}}$ appartienne à $\mathscr{O}(E)$ (le groupe orthogonal de E).
   Expliciter $\hat{u}$ en fonction de u.

(c) Montrer que $\rho_{u,\hat{u}} = s_u$.

Exercice 8 Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire que u vérifie

$$\forall x, y \in E, \ \ (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note S la sphère unité de E et $\varphi : S \to \mathbb{R}$l'application définie par $\varphi(x) = (u(x)|x)$.

1. Justifier que φ atteint son maximum sur S. On désignera par x_0 un point où ce maximum est atteint.
2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_0. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$x(t) = (\cos t)x_0 + (\sin t)y \quad \text{et} \quad f(t) = (u(x(t))|x(t)).$$

   Démontrer que f admet un maximum en 0.
3. En déduire que y est orthogonal à $u(x_0)$.
4. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.

Exercice 9 Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A ; il défini, pour tout $u \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par $f_A(u) = Au$.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (.|.))$ formée de vecteurs propres de f_A.
   Dans la suite, on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f_A rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \text{ et } f_A(e_k) = \lambda_k e_k,\ k \in \{1, 2, ..., n\}$$

   Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_k)$, et $\mathscr{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.
   Si v est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $R_A(v) = \dfrac{(Av|v)}{(v|v)} = \dfrac{(f_A(v)|v)}{(v|v)}$.
2. Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
   (a) Calculer $R_A(e_k)$.
   (b) Si $v \in V_k \backslash \{0\}$, montrer que $R_A(v) \leq \lambda_k$ et conclure que $\lambda_k = \max\limits_{u \in V_k \backslash \{0\}} R_A(u)$.
3. Soient $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et $F \in \mathscr{F}_k$.
   (a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$ est ≥ 1.
   (b) Soit w un vecteur non nul de $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$; montrer que $R_A(v) \geq \lambda_k$.
4. Établir le résultat, dit théorème de Courant-Fischer,

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathscr{F}_k} (\max_{v \in F \backslash \{0\}} R_A(v)).$$

Exercice 10 On désigne par A_n les (n, n) matrices réelles telles que $a_{ij} = \inf(i, j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

1. Montrer que A_n possède n valeurs propres réelles, distinctes ou confondues, dont aucune n'est nulle.
2. Soit I_n le (n, n) matrice unité. On pose $P_n(x) = \det(I_n - xA_n$.
   (a) Vérifier la relation

$$P_n(x) = (2 - x)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

   (b) Posant $x = 2 - 2\cos(2\theta)$, on écrit $P_n(2 - 2\cos(2\theta)) = Q_n(\theta)$. Vérifier que

$$Q_n(\theta) = \frac{\cos(2n + 1)\theta}{\cos \theta}.$$

   (c) En déduire les valeurs propres de A_n.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique la matrice A_n représente une forme quadratique q. En utilisant ce qui précède, montrer que q est une forme définie positive.
   retrouver ce résultat en utilisant une décomposition de Gauss, qui fait intervenir les polynômes de la forme : $\xi_k = x_k + x_{k+1} + ... + x_n$.

• • • • • • • • • • •