SÉRIE $n°1$

Algèbre générale

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Soit G un groupe multiplicatif non trivial d'élément neutre e. Soit $x \in G$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Un sous-groupe fini de G contient x.
2. Le groupe engendré par x est fini.
3. Il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = e$.

Exercice 2

Soit $(E, .)$ un monoïde avec E un ensemble fini. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers. Montrer que $(E, .)$ est un groupe.

Exercice 3

1. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux supérieurs ou égales à 2. Montrer qu'il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$_0a - v_0b = 1, \text{ avec } u_0 < b \text{ et } v_0 < a \quad (*)$$
et exprimer en fonction de u_0, v_0, a et b tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}$ solutions de $ua - vb = 1$.
2. Déterminer deux entiers u et v vérifiant $47u + 11v = 1$.

Exercice 4

Soient m et n deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que $\mathbb{Z}/_{mn\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sont isomorphes. En déduire que : $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. ($\varphi(n) = \text{card}\{k \,/\, 1 \leq k \leq n \text{ et } n \wedge k = 1\}$)
2. Soit p un nombre premier, calculer $\varphi(p^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un endomorphisme de l'anneau $(\mathbb{C}, +, .)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x$. Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Exercice 6

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini. Calculer $\prod_{x \in \mathbb{K}^*} x$.

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

$$a)\quad 3x + 5 = 0 \text{ dans } \mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}} \quad b)\quad x^2 = 1 \text{ dans } \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}} \quad c)$$
$$x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ dans } \mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$$

Exercice 8

Résoudre les systèmes suivantes :

$$a) \begin{cases} x \equiv 1[6] \\ x \equiv 2[7] \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x \equiv 2[5] \\ 5x \equiv 1[6] \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y \equiv 4[11] \\ xy \equiv 10[11] \end{cases}$$

Exercice 9

Soit A l'ensemble défini par :
$$A = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } z = a + jb\}$$
avec $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

1. Montrer que A muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est l'ensemble U défini par :
$$U = \{z \in A / |z| = 1\}$$

Exercice 10

On considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$).

1. Montrer que les nombres $1, \alpha, \alpha^2$ sont linéairement indépendants. En utilisant $\alpha^3 = 2$, on montrera que toute relation de dépendance linéaire entraînerait que α soit rationnel.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel L de $\mathbb{R}$ engendré par $1, \alpha, \alpha^2$ est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in L^*$. Montrer que l'application de L dans lui même qui à y associé xy est une bijection. En déduire que L est un corps. Donner l'expression de l'inverse de $x \neq 0$

Exercice 11

Soit I un idéal de l'anneau commutatif A. On appelle radical de I, noté $\sqrt{I}$, l'ensemble
$$\{x \in A \ / \ \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Démontrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.
2. Si $I \subset J$ démontrer que $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. En déduire que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

1. Quel est le noyau de A et son rang ?
2. En déduire les matrices qui commutent avec A.

Prof : Med TARQI

Exercice 13

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ayant un terme et un seul non nul par ligne et par colonne. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 14

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n où pour tout (i,j) $a_{ij} \in \{-1,1\}$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{Z}$ et qu'il est divisible par 2^{n-1}.

●●●●●●●●●●●