SÉRIE $n°2$

# Espaces vectoriels normés

Année scolaire 15/16

## Exercice 1

1. Déterminer toutes les normes sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ :
$$x \mapsto N(x) = \sum_{k=1}^{n} k|x_k| \text{ et } x \mapsto N'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{k}$$
où $x = (x_1, ..., x_n)$.
   b) Montrer que $N, N', \|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ sont équivalentes et représenter, dans le cas $n = 2$, les boules unités correspondantes.

## Exercice 2

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit, pour tout $f \in E$ :
$$\|f\|_{\mathscr{C}^1} = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|.$$
Montrer que $\|.\|_{\mathscr{C}^1}$ est une norme sur $E$. Est-elle équivalente à la norme de la convergence uniforme sur $E$.

## Exercice 3

Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\right\}$. On définit pour $f \in E$ :
$$N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|, \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont deux normes équivalentes sur $E$.

## Exercice 4

1. Soit $I$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble $\{(x, f(x))/x \in I\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $\{(x, f(x))/x \in I\}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

## Exercice 5

Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel : Soit $E$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Si $E$ est de dimension finie, montrer que $F = \overline{F}$.
3. Dans le cas général, montrer que $F = \emptyset$ ou $F = E$.

## Exercice 6

Suites de fonctions : Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, une suite de fonctions de $E$ et $f \in E$. Comparer les énoncées :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

## Exercice 7

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ) des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $A \in E$, on définit :
$$N(A) = \max_{1\le i\le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

1. Montrer que $N$ est une norme sur $E$.
2. Montrer que $N$ vérifie la propriété
$$\forall (A, B) \in E^2, \ N(AB) \le N(A)N(B).$$
3. En déduire que $\forall A \in E, \forall k \in \mathbb{N}^*, N(A^k) \le N(A)^k$.

## Exercice 8

Soit $f$ et $g$ deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$.

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$
2. Montrer que la fonction $\varphi$ est continue.
3. En déduire que l'ensemble de $\mathbb{R}$ suivant est fermé :
$$A = \{x \le 0 / \max(2\sin x, e^{\cos x}) \in \mathbb{N}\}.$$

## Exercice 9

On se propose de montrer à l'aide de définition que les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont ouvertes :
$$A = \mathbb{R}\backslash[-1,1], \quad B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}.$$

1. Soit $x \in A$ et $r = |x| - 1$. Montrer que la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ et incluse dans $A$.
2. Soit $x \in B$ et $r = \left|x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)\right|$. Montrer que la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ est incluse dans $B$.
3. En déduire que $A$ et $B$ sont ouvertes.
On n'oubliera pas de vérifier que les réels $r$ ci-dessus ne sont pas nuls.

PROF : MED TARQI

### Exercice 10

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$ : $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt$. Montrer que

1. $N_a$ est une norme.
2. $N_0$ et $N_1$ sont équivalentes.
3. Si $a, b \in [0,1]$, alors $N_a$ et $N_b$ sont équivalentes.
4. Soit $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$. Déterminer pour quelles normes $N_a$ la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et quelle est sa limite.
5. Si $0 \leq a < b$ et $b > 1$, alors aucune des normes $N_a$ et $N_b$ n'est plus que l'autre.

### Exercice 11

Soit $K$ une partie de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 dans son intérieur. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$j_K(x) = \inf\left\{\alpha > 0 / \frac{x}{\alpha} \in K\right\}.$$

1. Justifier la définition, et montrer qu'on a $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$.
2. On suppose que $K$ est borné. Montrer que $j_K(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
3. Montrer que si $K$ est convexe, alors $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. (Commencer par montrer que si $\dfrac{x}{\alpha} \in K$ et $\dfrac{y}{\beta} \in K$, alors $\dfrac{x+y}{\alpha+\beta} \in K$ ).
4. On suppose que $K$ est compact, convexe et symétrique par rapport à 0.
   Montrer que $j_K$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, et que $K$ est la boule unité fermée de la norme $j_K$.

### Exercice 12

Soit $E : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction partie entière, et considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$.

1. Tracer le graphe de $f$ sur $[-3,3]$.
2. Écrire $I = f^{-1}\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)$ et $J = f\left(\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)$ comme réunions infinies d'intervalles
3. $I$ et $J$ sont-ils ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre ? Commenter.

### Exercice 13

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application

$$N : (x,y) \to \max\{|x|, |2x+y|\}.$$

1. Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Décrire la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.
2. Montrer que $N$ est équivalente à la norme $\|\|_1$, et trouver des constantes strictement positives $\alpha$ et $\beta$ telles que $\alpha\|.\|_1 \leq N \leq \beta\|.\|_1$.
3. Décrire l'intérieur et l'adhérence de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |2x-y| < 1\}$.
4. $\overline{A}$ est-il compact ? Est-il connexe ?

### Exercice 14

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $p, q$ des normes sur $E$.

1. On suppose que $B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$. Montrer que $q \leq p$.
2. On suppose que $B_p(0,1) = B_q(0,1)$. Montrer que $p = q$.

●●●●●●●●●●●