

Limite et continuité

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que f est continue pour toute partie A de E , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 2

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés et f une application de E dans F vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et f bornée sur la boule unité. Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 3

1. Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble $\{(x, f(x)) / x \in I\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $\{(x, f(x)) / x \in I\}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soit K une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un triangle inclus dans K d'aire maximale.

Exercice 5

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé E tel que $H = \text{Ker } f$ où f est une forme linéaire non nulle. Montrer l'équivalence : f continue si et seulement si H non dense dans E .

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E tendant vers 0, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que f est continue.

Exercice 7

Exercice 68. Applications linéaires continues Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose $\|u\| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \|u(x)\|_F$.

1. Montrer que $\|u\|$ existe et que c'est un maximum.
2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, appelée subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
3. Montrer que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$.
4. En déduire que : $\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle sur E , on pose $H = \text{Ker } f$. Montrer que $d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel normé, A un compact de E et f une application de A dans A telle que :

$$\forall (x, y) \in A^2, (x \neq y) \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Prouver que f a un point fixe (c'est-à-dire il existe un élément $z \in A$ tel que $f(z) = z$). (procéder par l'absurde en supposant que $c = \inf\{d(x, f(x)), x \in A\} > 0$).

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E ; on pose $d(x, F) = a$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

Exercice 11

Soit f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \max(f(x), g(x))$.

1. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$
2. Montrer que la fonction φ est continue.
3. En déduire que l'ensemble de $\mathbb{R}$ suivant est fermé :

$$A = \{x \leq 0 / \max(2 \sin x, e^{\cos x}) \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 12

Soient E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $f, g \in E$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)g(t)| = 0 \implies f = 0$;
2. L'ensemble $g^{-1}\{0\}$ est d'intérieur vide.

Exercice 13

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(f_j)_{1 \leq j \leq p}$ des bases de E et F respectivement. Soit A la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, calculer $\|f\|$ dans les cas suivants :

1. E et F munis de la norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^p |y_i|$ (sur F).
2. E et F munis de la norme ∞ : $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_\infty = \sup_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket} |y_j|$ (sur F).

Exercice 14

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et u l'endomorphisme qui envoie $f \in E$ sur la fonction $u(f) : x \mapsto f(x) - f(0)$.

1. Montrer que l'endomorphisme u est continu sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer sa norme.
2. On définit la norme $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$. Montrer que l'endomorphisme u n'est pas continu sur $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 16

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit T l'application de E de E définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que T est linéaire continue, et calculer $\|T\|$.
Même question pour l'application

$$S(f) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt$$

où $\varphi \in E$.

Exercice 17

1. Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et f une application de A dans A telle que : il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de A^2 :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Montrer que f admet un point fixe $a \in A$ et un seul, qui est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Indication : Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. APPLICATION : En étudiant l'application : $T : f \longrightarrow T(f)$ définie sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, par :

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x \sin(tf(t)) dt,$$

montrer que l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

3. a) Montrer que si f est continue et s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que f^r soit contractante, alors f a un point fixe unique.

- b) Soit $X = (\mathcal{C}^1([0, 1]), N)$ avec $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in X$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt.$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in X$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercice 18

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, muni d'une norme induite de celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que C et C privé d'un point sont connexes.
2. C peut-il être homéomorphe à $[a, b] \subset \mathbb{R}$? peut-il être homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que l'ensemble

$$\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_2 \text{ et } \det(A) = 1\}$$

est une partie connexe par arcs.

Exercice 20

Soit $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire canonique $(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons

$$\|A\|_S = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \text{ et } \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_S$ et $\|\cdot\|_2$ sont bien définies et sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tous $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
3. Montrer que $\|A\|_S = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (x|Ay).$

.....