# SÉRIE $n°4$
## Fonctions vectorielles

Année scolaire 15/16

### Exercice 1

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension finie, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ dérivable en 0. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$. Montrer que l'application $f$ est linéaire.

### Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une application continue é valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.
Montrer qu'il y a équivalence entre les énoncés :

1. $f$ est dérivable en 0 ;
2. $x \longmapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet une limite en 0 dans $E$.

### Exercice 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle $I$ quelconque de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes réelles $\alpha > 1$ et $K \geq 0$ telle que

$$\forall x, y \in I, \ \ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que $f$ est constante.

### Exercice 4

Soit $f : ]-1, 1 = [\to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \left(t^2 \sin \dfrac{1}{t}, t^2 \cos \dfrac{1}{t}\right) & \text{si } -1 < t < 0 \\ (0, 0) & \text{si } \ 0 \leq t < 1. \end{cases}.$$

Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $f'(]-1, 1[)$ n'est pas connexe par arcs.

### Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. étudier la limite suivante :

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

### Exercice 6

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{t^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } \ t \leq 0. \end{cases}.$$

1. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall t > 0, \ \ f^{(n)}(t) = P_n\left(\dfrac{1}{t}\right) e^{\frac{-1}{t^2}}$, oé $P_n$ est un polynôme, dont on précisera le degré et le coefficient maximal.
2. étudier la continuité et la dérivabilité é l'ordre $n$ en 0 ( é droite ).

### Exercice 7

Soit $n$ un entier naturel non nul et $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'application $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \ \varphi(t) = \det(i + tf)$$

oé $i$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\varphi$ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

### Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ , on pose :

$$g(x) = \int_a^b f(t - x)e^{it}dt.$$

Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'$ prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives et l'on souhaite établir que $f'$ s'annule.

1. établir que $A = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$ est une partie connexe par arcs de $I^2$.
2. On note $\delta : A \to R$ l'application définie par $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$.
   établir que $0 \in \delta(A)$.
3. Conclure en exploitant le théorème de Rolle

### Exercice 10

Soit$(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f$ et $f''$ soient bornées. On pose

$$M_0 = \|f\|_\infty \text{ et } M_2 = \|f''\|_\infty.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. établir que pour tout $h > 0$ :
$$\|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
2. En déduire
$$M_1 = \|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{M'M_2}.$$

### Exercice 11

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } \|f(1)\| = 1.$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \geq 4$.

## Exercice 12

Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$, et $f : [-a, a] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\forall t \in [-a, a]$,

$$\|f'(t)\| \leq \frac{1}{2a}\|f(a) - f(-a)\| + \frac{a^2+t^2}{2a} \sup_{u\in[-a,a]} \|f''(t)\|.$$

## Exercice 13

Soit $I$ un intervalle réel non trivial, et soit $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ telle que $\forall t \in I$, les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires ( *on parle de mouvement é accélération centrale* ). On note

$$\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t),$$

pour $t \in I$.

1. Montrer que la fonction vectorielle $\sigma$ ainsi définie est constante sur I.
2. Montrer que s'il existe $t' \in I$ tel que la famille $(f(t'); f'(t'))$ est libre, alors l'ensemble image $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$ ( *on a alors un mouvement é trajectoire plane* ).

## Exercice 14

Soit $I$ un intervalle réel non trivial, et soit $f \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$ telle que $\forall t \in I$, $f(t) \neq 0$. On considère l'application $\varphi$ définie sur l'intervalle $I$ par

$$\varphi(t) = \|f(t)\|, \ \forall t \in I.$$

$\|.\|$ désignant la norme euclidienne.

1. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$, et que

$$\varphi'(t) = \frac{(f'(t)|f(t))}{\|f(t)\|}, \ \forall t \in I.$$

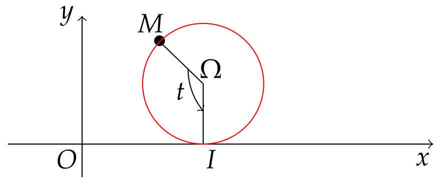
   ( $(.|.)$ désigne le produit scalaire usuel ).
2. Calculer $\varphi''(t)$ pour $t \in I$.

## Exercice 15

Donner un développement limité é l'ordre 2 au voisinage de $t_0 = 2$ de la fonction $f$ $:]1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3+4}{t-1}\right)$

## Exercice 16 — LA CYCLOÉDE

1. Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe $(Ox)$. On note $I$ le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et l'axe $(Ox)$ et on note $\Omega$ le centre de $(\mathscr{C})$ ( $\Omega$ et $I$ sont mobiles). $M$ est un point donne de $(\mathscr{C})$ ( $M$ est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.




   Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point $M$ (on prendra $t$ pour paramètre).
2. étudier et construire l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

   ou $R$ est un réel strictement positif donne.

•••••••••