Série $n°5$
Calcul différentiel

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Calculer la différentielle de l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 2

Soit E_n l'espace des polynômes de degré inférieure ou égal é n. étudier la différentiabilité des applications $P \longmapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\mathrm{d}t$ et $P \longmapsto P' - P^2$.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(M^3)$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer la différentielle de f en tout point M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer la différentielle en I_n puis en $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ de l'application $f : M \to M^{-1}$.

Exercice 4

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x,y) = f(y,x)$.
2. $g(x) = f(x,x)$.
3. $g(x,y) = f(y, f(x,x))$.
4. $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier la réponse.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport é x, é y en $(0,0)$? Donner la ou les valeurs le cas échéant et justifier la réponse.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier la réponse.
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
5. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$.

Exercice 7

On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (xy, \cos x, xy\sin(xy))$$

et

$$g(u,v,w) = uvw$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. En utilisant l'expression trouvée en (1.), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $Jf(x,y)$ et $Jg(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le résultat sous (2.) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ si $x = 0$ et $f(0,y) = y$ sinon. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toute direction, main elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \longmapsto \|x\|$ est-elle différentielle ?
2. Préciser en ces points le vecteur gradient.

Exercice 10

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,y)$.

1. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$. Montrer que $||df_x||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$.

Prof : Med TARQI

2. On considère la fonction $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x + ty)$, en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $df_x\left(\dfrac{x-y}{||x-y||}\right) = 1$ et $||df_x||_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Exercice 11

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.

1. Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x) \quad (1)$$
2. Montrer que (1) caractérise les fonctions homogènes de degré r.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice d'ordre n, et soit $\det(A) = f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ développement par rapport é la première ligne.
Montrer que $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{\partial f}{\partial a_{1i}}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$.

Exercice 12

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et que sa différentielle est l'application linéaire nulle.
2. Montrer que f ainsi que ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. Que peut-on dire de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Conclure.

Exercice 13

Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2. $f_2(x,y) = \arctan xy$
3. $f_3(x,y) = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$
4. $f_5(x,y) = \sin x \sin y$

Exercice 14

étudier les extremums locaux et globaux des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

1. $f_1(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z$
2. $f_2(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z$.

Exercice 15

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, en réalisant le changement de variables $(x,y) \to (u = 2x+y, v = 3x+y)$.

Exercice 16

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation aux dérivées partielles
$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f.$$

Exercice 17

Soit E un espace de Banach. Notons I l'application identique de E et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|v\| < 1$. Montrer que $I - v$ est inversible et exprimer son inverse. Indication : résoudre l'équation $x - u(x) = y$ où y est fixé.

Exercice 18

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$
oé a est un réel.

1. On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(u,v) = g\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2}\right)$. En utilisant le théorème de composition, montrer que
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}.$$
2. Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f.
3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 19

On pose $f_{x,y} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & xt^2 + yt \end{array}$ puis $F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$.
étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20

Déterminer un vecteur normal ainsi que l'équation du plan tangent au graphe de f au point indiqué :
$$f(x;y) = xy - x + y, \quad M = (0,2,2)$$
$$f(x;y) = \sin(\pi xy) M = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

Exercice 21

On pose $z(x,y) = f(u)$ avec $u = xy$ oé f est une fonction d'une variable réelle deux fois dérivable. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de z.

Exercice 22

La distance parcourue par une automobile roulant é vitesse constante v durant un temps donné t est donnée par la formule $l = vt$. Vérifier que
$$\frac{\partial l}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial l} = -1$$

Exercice 23

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^2 + \ln(x^2)$$

1. Quel est le domaine de définition D de la fonction f ?
2. écrire l'équation du plan tangent é la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,2,3)$.

•••••••••••