

SÉRIE n°6

Réduction des endomorphismes

Année scolaire 15/16

I

COMPLÉMENT D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1

On considère un entier naturel n non nul et une application h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus h non constante.

Pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on définit l'application

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_k(x) = (h(x))^k. \end{aligned}$$

Montrer que la famille $S = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère un entier n non nul et on note E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
2. Déterminer les coordonnées dans cette base des polynômes $P = 1$ et $Q = \left(X - \frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et on considère l'ensemble

$$F = \{P \in E / P(1) = 0\}.$$

1. Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe $P(1)$ est linéaire. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminer la dimension et donner une base de F .

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = 1, X, \dots, X^n$. Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* .
2. On considère les deux éléments φ et ϕ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = P(1)$ et $\phi(P) = P'(0)$. Déterminer les coordonnées de chacune des formes φ et ϕ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ 0 & 0 & C_2^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & C_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On associe à M un endomorphisme, montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .

Exercice 6

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7

1. a) Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \text{Tr}(AX)$.
b) En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
2. Déterminer les éléments $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tels que pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$.

Exercice 8

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U^t V$.
2. En déduire $H^2 = \text{Tr}(H)H$.
3. On suppose $\text{Tr}(H) \neq -1$. Montrer que $I_n + H$ est inversible et $(I_n + H)^{-1} = I_n - \frac{1}{1 + \text{Tr}(H)}H$.
4. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(HA - 1) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \text{Tr}(HA^{-1})}A^{-1}HA^{-1}$$

Exercice 9

Une transvection d'un espace vectoriel E est une application $f : E \rightarrow E$ de la forme

$$x \mapsto x + \gamma(x)u$$

où u est un vecteur donné non nul de E et γ est une forme linéaire sur E telle que $\gamma(u) = 0$.

1. Démontrer que toute transvection f de E est un endomorphisme vérifiant :

$$(f - id_E) \circ (f - id_E) = 0.$$

2. Réciproquement, soit g un endomorphisme de E vérifiant :

$$(*) \quad (g - id_E) \circ (g - id_E) = 0.$$

- a) Vérifier que l'on a : $\text{Im}(g - id_E) \subset \text{Ker}(g - id_E)$.
- b) Démontrer dans le cas $\dim(E) = 2$ ou 3 , on a forcément : $g = id_E$ ou $\dim(\text{Im}(g - id_E)) = 1$.
- c) Dédire que si $\dim E = 2$ ou 3 alors g est une transvection.
- d) Dans le cas où $\dim E \geq 4$, définir un endomorphisme g vérifiant $(*)$ et qui n'est pas une transvection.

Exercice 10

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , n étant un entier naturel non nul.

1. Si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont $(n+1)$ réels distincts, montrer que les polynômes définis par :

$$L_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On donne de plus $(n+1)$ réels : $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(x_i) = y_i$.
Écrire L à l'aide des L_i .

3. Calculer les sommes : $\sum_{i=0}^n L_i(X)$ et $\sum_{i=0}^n x_i L_i(X)$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{t + a^2}$, a désignant un réel strictement positif. Aux réels distincts $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ de $\mathbb{R}$, on associe les réels $z_i = f(t_i)$, et le polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(t_i) = z_i$. Montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de L est $\frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^n (t_i + a^2)}$.

On pourra calculer de deux façons la dérivée d'ordre n de L .

IIRÉDUCTION DES
ENDOMORPHISMES**Exercice 11**

Soit A une matrice non nulle fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. On considère l'application f qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe

$$f(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A,$$

où tr désigne la trace d'une matrice (somme des coefficients diagonaux). Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace nulle.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0 . Montrer que le sous-espace propres associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 .
3. Montrer que $\text{Im}(f) = F$. Quelle est la dimension de F ?
4. Montrer que F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\text{tr}(A)$.
5. En déduire que f est diagonalisable, et que c'est la composée de la projection sur F parallèlement à la droite engendrée par A avec l'homothétie de rapport $\text{tr}(A)$.

Exercice 12

Soit E l'espace vectoriel des applications définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application :

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

1. Déterminer une relation entre f_n et f_n' .
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est une famille libre de E .

Exercice 13

Soit $E = l^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $\Delta : E \rightarrow E$ l'endomorphisme définie par :

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n).$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

Exercice 14

Soient A et B deux polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}^*$) avec A de degré n à racines simples $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ suivant :

$$P \mapsto R,$$

où R est le reste de la division euclidienne de PB par A .

Exercice 15

Diagonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 17

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. et u l'endomorphisme canoniquement associé.

- Déterminer les droites stables par u . u est-il diagonalisable ?
- Montrer qu'il n'y a que deux plans stables, préciser une base pour chacun.

Exercice 18

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme non nul de E , on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

- Montrer que f n'est pas injectif.
- Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .
- L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 19

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres réelles de A .
- a) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A .
b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 20

Soit a un réel non nul et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une relation entre A et A^2 .
- En déduire les valeurs et les sous-espaces propres de A .
- Vérifier que A est diagonalisable.

Exercice 21

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto a + b \cos x + c \sin x + d \cos(2x) + e \sin(2x)$$

avec a, b, c, d, e des réels.

- Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.

- On définit l'application φ qui à tout P de E associe l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi(P) : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x+t)P(t)dt.$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer les images par φ des applications $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin(x)$. Quel est le rang de φ ?
- L'endomorphisme φ de E est-il diagonalisable ?

Exercice 22

L'objectif de cet exercice est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(1) \quad X^3 + X = 0.$$

Soit A une matrice non nulle satisfaisant la relation (1).

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } A \oplus \text{Ker}(A^2 + I_3)$.
- Montrer que si x n'appartient pas à $\text{Ker } A$, alors (x, Ax) est libre.
- Déterminer le polynôme minimal de A .
- Montrer que $\text{Ker } A$ est de dimension 1. En déduire que

$$A \text{ est semblable à la matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

- Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors λ^3 est valeur propre de A^3 .
- a) Soit j le nombre complexe défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$A^3 - \lambda^3 I = (A - \lambda I)(A - \lambda j I)(A - \lambda j^2 I).$$

- En déduire que, si μ est une valeur propre de A^3 , il existe une valeur propre λ_0 de A telle que $\lambda_0^3 = \mu$.

Exercice 24

Soit r endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils possèdent un vecteur propre commun.

Exercice 25

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit L une matrice ligne non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et C une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note A la matrice $A = CL$.

- a) Exprimer le réel LC en fonction des coefficients de L et de C .
b) Déterminer le rang de la matrice A .
c) Calculer le produit AC en fonction de LC et C .
- Déterminer une relation entre A^2 et A . En déduire les valeurs propres de A .
- a) Montrer que $A + I_n$ est inversible si, et seulement si, $LC + 1$ est non nul.
b) Dans le cas où $LC + 1$ est non nul, déterminer l'inverse de $A + I_n$.

Exercice 26

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de rang 1 ($n \geq 1$).

1. Montrer que tout vecteur non nul de l'image de f est un vecteur propre de f .
2. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^2 \neq 0$.

Exercice 27

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $A = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ et $B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ deux éléments non nuls de $\mathbb{C}^{n-1}$. On note $S = \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

• • • • •

1. Déterminer le rang de f .
2. a) Déterminer les valeurs propres de f .
b) Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, S est non nul.

Exercice 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \phi(X) = AX - XB.$$

On désigne par α (resp. β) une valeur propre de la matrice A (resp. B).

1. Vérifier que ϕ est endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe des matrices colonnes non nulles C et D telles que $AC = \alpha C$ et ${}^tBD = \beta D$.
3. Calculer $\phi(C {}^tD)$ en fonction de C, D et β .
4. En déduire que $\alpha - \beta$ est valeur propre de l'endomorphisme ϕ .