Série $n°7$
Espaces préhilbertiens réels

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1)$ définit une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}[X]$. Est-ce un produit scalaire ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c et d pour que l'application :
$$(x,y) \mapsto ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$
définisse un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^2$.
3. Soient n entier naturel non nul, $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts et $w \in \mathbb{R}^{n+1}$. A quelle condition sur w l'application :
$$\varphi : (P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{n} w_i P(x_i)Q(x_i)$$
définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. a) On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, ..., x_n$ strictement positifs. Montrer que $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)$.
   Dans quel cas a-t-on égalité ?
   b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$.
2. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que
   $$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_0^b f^2(t)\mathrm{d}t.$$
   Dans quel cas a-t-on égalité ?
   b) On suppose que f ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que
   $$\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\right)\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \geq (b-a)^2.$$
   Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 3

Montrer que l'application
$$(P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Donner une base orthonormée.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur $[-1,1]$. Pour f et g de E, on pose $\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires. Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.
3. Soit $\phi : f \to \widehat{f}$ avec $\widehat{f} : x \to f(-x)$. Montrer que ϕ est la symétrie orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$

Exercice 5

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application qui, à tout couple (A,B) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, associe le scalaire $\mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espaces des matrices antisymétriques sont orthogonaux et supplémentaires vis-à-vis de ce produit scalaire.

Exercice 6

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$x_1 = (1,1,0,1),\ \ x_2 = (1,1,1,0),\ \ x_3 = (1,1,-2,1).$$

1. Déterminer la dimension de H et une base de son orthogonal $H^{\perp}$.
2. On note p la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs unitaires telle que
$$\forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.

Prof : Med TARQI

2. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est égal à E.
3. En déduire que la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 9

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on pose

$$\varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice 10

On munit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On note F l'espace des fonctions affines de E et $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction de E définie par $f(t)=t^2$.

1. Déterminer la projection orthogonale de f sur F. On la note $p_F(f)$
2. Calculer $\|f-p_F(f)\|^2$.
3. En déduire le minimum pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b(t^2-at-b)\mathrm{d}t$.

Exercice 11

Étant donné $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $E=\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de terme dominant égal à X^n.
On définit la fonction G_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\in\mathbb{R},\ \ G_n(t)=(-1)^n e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$$

où $t\mapsto\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $t\mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rrcl}(.|.): & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (P,Q) & \longmapsto & (P|Q)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t\end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.

2. Montrer que G_n est un élément de $\mathscr{U}$. On notera par la suite $F=X^n-G_n(X)$.
3. Pour $j\in[\![0,n]\!]$, calculer $(G_n|X^j)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}$.
4. Montrer que le polynôme F est le projeté orthogonal du polynôme X^n sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
5. En déduire, en fonction de n la valeur de $\displaystyle\inf_{P\in\mathscr{U}}\int_{-\infty}^{+\infty}P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

Exercice 12

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,...,x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1,...,x_n)=\left(x_i|x_j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1,...,x_n)=\det(G(x_1,...,x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1,...,x_n))=\mathrm{rg}(x_1,...,x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n)=0$ et que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,...,x_n)>0$.
3. On suppose que la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre dans E. On pose $F=\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)$. Pour $x\in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|^2$).
   Montrer que $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)}{\gamma(x_1,\ldots,x_n)}}$.

Exercice 13

On considère l'espace vectoriel $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$, muni du produit scalaire

$$(f|g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On considère F le sous-ensemble de E définie par $F=\{f\in E\ /\ f(0)=0\}$.

1. Montrer rapidement que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E et que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit g un élément de $F^\perp$

$$g_1(t)=\begin{cases}2tg(t) & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ g(t) & \text{si } t\in]\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

   Montrer que g_1 est dans F et en déduire que g est nulle. En déduire que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.
3. Que dire de $(F^\perp)^\perp$?

• • • • • • • • • •