SÉRIE $n°8$

Espaces euclidiens

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres pour la matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les termes sont nuls, sauf les termes suivantes égaux à 1 :

$$a_{1,1}, a_{n,2}, a_{n-1,3}, a_{n-2,4}, ..., a_{2,n}.$$

Exercice 4

Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ euclidien défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

Déterminer la projection orthogonale sur F et pour $x \in F$, calculer $d(x, F)$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ un vecteur non nul. On considère l'application de E dans E définie par :

$$f : x \mapsto u \wedge x$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer l'image le noyau.
3. Déterminer f^*.
4. Montrer que f^2 est diagonalisable et déterminer son spectre.

Exercice 6

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$(X, Y) \mapsto \operatorname{Tr}({}^tXY).$$

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ_A l'application définie par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \varphi_A(X) =^t AXA$$

Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer l'adjoint $(\varphi_A)^*$ de φ_A.

Exercice 7

Soit T_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \ t_{ii} = a_i$$

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \ t_{i+1,i} = t_{i,i+1} = b_i \neq 0$$

les autres éléments sont nuls (matrice tridiagonale symétrique)

1. Montrer que les valeurs propres de T_n sont des réelles, deux à deux distincts, qu'on notera :

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < ... < x_n^{(n)}$$

2. On note P_n le polynôme caractéristique de T_n. Calculer P_1 et P_2 puis établir pour $n \geq 3$ une relation de récurrence donnant P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.
3. a) Montrer que

$$x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)}.$$

   b) Montrer que

$$x_1^{(3)} < x_1^{(2)} < x_2^{(3)} < x_2^{(2)} < x_3^{(3)}.$$

   c) Établir que, pour tout $k \in \{2, 3, ..., n\}$:

$$x_1^{(k)} < x_1^{(k-1)} < x_2^{(k)} < ... < x_{k-1}^{(k)} < x_{k-1}^{(k-1)} < x_k^{(k)}.$$

Exercice 8

Trouver a, b des réels tels que $\displaystyle\int_0^{\pi} (a \cos t + b \sin t - t)^2 \, dt$ soit minimal.

Exercice 9

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on note (e_1, e_2, e_3) sa base canonique. On note $w = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ et π le plan vectoriel d'équation $2x + 3y + z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport au plan π et S la matrice de s dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Donner une base (u, v) du plan π et justifier, sans calcul, que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice S' de la symétrie s dans la base (u, v, w).
3. En déduire la matrice S.

PROF : MED TARQI

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien (de dimension finie), si $u \in E\backslash\{0\}$ on note par s_u la symétrie orthogonale parallèlement à $\mathbb{R}u$.

1. Montrer que
$$\forall x \in E,\ \ s_u(x) = x - 2\frac{(x|u)}{\|u\|^2}u.$$
2. Soit $u, v \in E\backslash\{0\}$ et $\rho_{u,v}$ l'endomorphisme de E défini par
$$\rho_{u,v}(x) = x - (v|x)u, \forall x \in E.$$
   a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\rho_{u,v}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit diagonalisable.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u|v)$ pour que $\rho_{u,v}$ soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.
3. a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\rho_{u,v}$.
   b) Montrer que pour tout vecteur non nul u, il existe un unique vecteur non nul, noté $\hat{u}$, tel que $\rho_{u,\hat{u}}$ appartienne à $\mathcal{O}(E)$ (le groupe orthogonal de E). Expliciter $\hat{u}$ en fonction de u.
   c) Montrer que $\rho_{u,\hat{u}} = s_u$.

Exercice 11

Soit $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice de Gram associée à M la matrice $A =^t MM$. Montrer que :

1. Toute matrice de Gram est définie positif.
2. Si A est une matrice définie positive, toute valeur propre de A est un réel strictement positif.
3. Si une matrice symétrique réelle à toutes ses valeurs propres strictement positives, elle est définie positve.
4. Toute matrice A définie positive est une matrice de Gram.

Exercice 12

L'espace $E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $\forall (A,B) \in E^2,\ (A|B) = \mathrm{Tr}(^tAB)$.
On pose
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \mathrm{Vect}(I_4, U, U^2, U^3).$$

1. $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ sont deux éléments de E. Rappeler la valeur de $(A|B)$.
2. Montrer que (I_4, U, U^2, U^3) est une base orthogonale de F.
3. Soit V l'élément de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0.
Trouver la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

Exercice 13

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A ; il défini, pour tout $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par $f_A(u) = Au$.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (.|.))$ formée de vecteurs propres de f_A.
On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f_A rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :
$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \text{ et } f_A(e_k) = \lambda_k e_k,\ k \in \{1, 2, ..., n\}$$
Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_k)$, et $\mathcal{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.
Si v est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $R_A(v) = \dfrac{(Av|v)}{(v|v)} = \dfrac{(f_A(v)|v)}{(v|v)}$.
2. Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
   a) Calculer $R_A(e_k)$.
   b) Si $v \in V_k\backslash\{0\}$, montrer que $R_A(v) \le \lambda_k$ et conclure que $\lambda_k = \max\limits_{u \in V_k\backslash\{0\}} R_A(u)$.
3. Soient $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et $F \in \mathcal{F}_k$.
   a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$ est ≥ 1.
   b) Soit w un vecteur non nul de $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, ..., e_n)$; montrer que $R_A(v) \ge \lambda_k$.
4. Établir le résultat, dit théorème de Courant-Fischer,
$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k}\Big(\max_{v \in F\backslash\{0\}} R_A(v)\Big).$$

Exercice 14

On désigne par A_n les (n, n) matrices réelles telles que $a_{ij} = \inf(i, j), 1 \le i, j \le n$.

1. Montrer que A_n possède n valeurs propres réelles, distinctes ou confondues, dont aucune n'est nulle.
2. Soit I_n le (n, n) matrice unité. On pose $P_n(x) = \det(I_n - xA_n$.
   a) Vérifier la relation $P_n(x) = (2 - x)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.
   b) Posant $x = 2 - 2\cos(2\theta)$, on écrit $P_n(2 - 2\cos(2\theta)) = Q_n(\theta)$.
   vérifier que $Q_n(\theta) = \dfrac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta}$.
   c) En déduire les valeurs propres de A_n.

••••••••••