SÉRIE $n°9$

Séries dans un espace vectoriel normé

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Étudier la convergence des séries numériques de terme général u_n, dans les cas suivantes :

$u_n = \dfrac{1}{n2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
$u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$; $u_n = \sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$; $u_n = e^{-\sqrt{1+n}}$; $u_n = e^{\frac{a}{n}} - \sqrt{1-\dfrac{b}{n}}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 2

1. Montrer que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ est équivalent à $\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ où a est un réel à préciser.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n^\alpha} t dt$ où α est un nombre réel.
3. Même question avec $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t dt$.

Exercice 3

Soit la série de terme général $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est une série alternée.
2. En utilisant les développements limités montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Exercice 4

Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs ou nuls.

Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sqrt{u_n}$ $(n \geq 1)$.

Exercice 5

Soit f une fonction positive décroissante pour $x \geq 1$. On pose

$$\varphi(n) = \sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1. Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (on comparera $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$).
2. APPLICATION :
   a) Soit la série $g(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $g(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$ au voisinage de $^+$.
   b) Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.
   c) Montrer que la suite $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$ ($n \geq 1$) est convergente.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs satisfaisant à l'égalité :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que $\beta > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est convergente et que si $\beta < 1$ la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.
2. Que peut-on dire dans le cas $\beta = 1$?
3. Application : $u_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}$, $u_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)(2n+2)}$.

Exercice 7

1. Soit f une fonction continue décroissante sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Étudier la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t dt$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier le cas particulier : $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

1. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ converge, et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

PROF : MED TARQI

Exercice 9

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels telles que :

1. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
2. la suite de terme général $B_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ est borné.

Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.
Application : retrouver le critère de convergence spécial aux séries alternées.

Exercice 10

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & \text{si } a \neq b \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Exercice 11

En utilisant le résultat de l'exercice 9, montrer les deux séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ ($\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha > 0$) sont convergentes.

Exercice 12

On rappelle que $\cos(1)$ est le réel défini par la série $\cos(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Montrer que $\cos(1)$ est un nombre irrationnel.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire qu'il existe une constante C telle que $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

Exercice 14

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p = \exp(A)$.

Exercice 15

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A
Soit $A = A_t = M = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}$. Trouver un polynôme L tel que $\exp(A) = L(A)$.

Exercice 16

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0, \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et T l'endomorphisme de translation définis par

$$D(P) = P'(X) \text{ et } T(P(X)) = P(X+1).$$

Établir $exp(D) = T$.

•••••••••••