SÉRIE $n°10$

Familles sommables

Année scolaire 15/16

Exercice 1

1. Soit I un ensemble.
   a) Montrer que s'il existe une application injective $f : I \longrightarrow \mathbb{N}$, alors I est au plus dénombrable.
   b) Si $f : E \longrightarrow F$ est une surjection et si E est dénombrable, montrer F est dénombrable.
2. En déduire que les ensembles $\mathbb{N}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 3

Montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable, en déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$. En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5

Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1. $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$.
2. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}^*}$.
3. $(x^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $x \in \mathbb{C}$.
4. $\left(\dfrac{1}{a^p + b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, $a, b \in]1, +\infty[$.

Exercice 6

Considérons la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2},\ a_{ij} = \frac{1}{(i+j)^r},$$

où r est un nombre réel.
Montrer que cette famille est sommable si et seulement si $r > 2$ et calculer sa somme.

Exercice 7

Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Même question avec $u_n = \dfrac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

Considérons la famille $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ a_{ij} = \frac{a^i b^j}{(i+j)!},$$

où a et b sont des nombres complexes.
Montrer que cette famille est sommable et calculer sa somme.

Exercice 9

On considère la fonction ζ de Riemann, définie, pour $x \in]1, +\infty[$, par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

1. Démontrer les relations suivantes :
   a)
   $$\sum_{p=2}^{\infty} (\zeta(p) - 1) = 1 \text{ et } \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p (\zeta(p) - 1) = \frac{1}{2}.$$
   b)
   $$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p) - 1}{p} = 1 - \gamma \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \zeta(p) = \gamma.$$
   γ étant la constante d'Euler.
2. L'indicateur d'Euler d'un entier naturel non nul n est défini par
   $$\varphi(n) = \mathrm{card}\{k \in [\![1,n]\!] | k \wedge n = 1\}.$$
   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{d/n} \varphi(d)$.
   b) Pour $x \in]2, +\infty[$, en déduire une expression de la somme $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^x}$ à l'aide de la fonction ζ.

Exercice 10

Considérons les deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ avec $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série produit de Cauchy des séries numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est divergente.
2. Conclure.
3. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi(3p) = 2p$, $\varphi(3p+1) = 4p+1$ et $\varphi(3p+2) = 4p+3$. Vérifier que φ est une bijection de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)}$?

PROF : MED TARQI

Exercice 11

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul m, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{(m+n)\sqrt{n}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, de carré sommable (c'est-à-dire les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes). Montrer que la famille $\left(\dfrac{a_ib_j}{i+j}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et montrer l'inégalité
$$\sum_{(i,j)2(\mathbb{N}^*)2} \frac{a_ib_j}{i+j} \leq \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right).$$

Exercice 12

Établir que pour $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n,$$
en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Cantor, Georg (1845-1918), mathématicien allemand fondateur de la théorie des ensembles.

•••••••••••