SÉRIE $n°11$

Suites et séries de fonctions

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.
2. Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.
3. Si les f_n sont périodiques, alors f aussi.
4. Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 2

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1, 1[$, puis sur $[-a, a]$ avec $0 \leq a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0, 1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, \infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 3

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 5

On définit une suite de fonctions $p_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $p_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$,

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right).$$

1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$0 \leq \sqrt{x} - p_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^n.$$
3. En déduire que la convergence est uniforme sur I.

Exercice 6

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{n^2 + k^2} \geq \dfrac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ ne convergence pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7

Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0, 1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

PROF : MED TARQI

Exercice 8

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 9

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 10

Soit f la fonction déterminée par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n!}\arccos(\cos nx)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, +\infty[$. Calculer $f(\pi)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que, p étant un entier positif,
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{p}\right], \quad 0 < ex - f(x) < \frac{(p+1)!x}{pp!}.$$
3. La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 11

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule
$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.
2. Prouver que ζ est continue sur son domaine de définition.
3. Déterminer $\lim\limits_{s\to\infty} \zeta(s)$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ et tout $s > 0$, on a $\dfrac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{dx}{x^s} \leq \dfrac{1}{k^s}$. En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \dfrac{1}{s-1}$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de ζ.

Exercice 12

1. Démontrer que, pour $a > 0$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nae^{-na^2}$ est convergente.
2. On considère à présent la série de fonctions de terme général $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Démontrer que cette série est normalement convergente pour $|x| \geq a$, quel que soit $a > 0$. Préciser alors l'ensemble I de convergence.
3. Déterminer l'ensemble J de convergence de la série de terme général $g_n(x) = e^{-nx^2}$. Calculer sa somme sur J. En déduire que f est la dérivée d'une fonction connue, donner l'expression de f.

Exercice 13

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $f_n(t) = \dfrac{1}{n} t^n \sin nt$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. Soit $a \in]0,1[$.
   a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
   b) En déduire que la fonction $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
   $$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}.$$
   c) Montrer que $f(t) = \arctan \dfrac{t \sin t}{1 - t\cos t}$ pour $t \in]-1,1[$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$, $A_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} t^k \sin kt$.
   a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$ on ait $|A_n(t)| \leqslant M$.
   b) Montrer en écrivant $t^k \sin(kt) = A_k(t) - A_{k-1}(t)$ que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k(t)}{k(k+1)} + \frac{A_n(t)}{n}.$$
   c) En déduire que la série $\sum\limits_n f_n$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{A_k(t)}{k(k+1)}$ sur $[-1,1]$. Montrer que f est continue sur cet intervalle.
   d) En déduire les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ et de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$.

••••••••••