Série $n°12$

Séries entières

Année scolaire 15/16

Exercice 1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d(n)x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s(n)x^n$ où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 3

1. Trouver l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions classiques.

Exercice 4

Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+2}$ et calculer sa somme.

Exercice 5

(Extrait de MINES-PONTS PSI 97) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telles que :

- $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

On définit alors la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ par $b_1 = a_1$ et $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ pour $n \geq 2$. On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

On note $A : x \longmapsto A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $B : x \longmapsto B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

1. Montrer que $R_1 \geq 1$
2. Montrer que A est définie et continue sur $[-1, 1]$
3. a) Montrer que $0 \leq b_n \leq 1$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1

   b) Que peut-on en déduire pour R_2 ?
4. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$.
5. Montrer que $R_2 = 1$.

Exercice 6

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n : t \to t^n \sin(nx)$ avec x un réel de $]0, \pi[$.

1. Étudier de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$.
2. Calculer la somme $S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(px)$, puis la limite notée $S(t)$, de $S_n(t)$ pour n infini.
3. Calculer les intégrales sur $[0, 1]$, de S_n et de S.
4. En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge de donner sa somme.

Exercice 7

Soit $f : x \to e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. On se propose de deux méthodes à étudier dans les questions 1 et 2.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement en série entière sur $\mathbb{R}$ en effectuant le produit de deux séries entières.
2. a) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) suivante :

   $$(E) \quad y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

   b) En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer son développement en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire des méthodes 1 et 2, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$.

Exercice 8

Donner une expression aussi simple que possible de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Prof : Med Tarqi

Exercice 9

(Extrait de concours E3A MP-PC 99) Le but de l'exercice est de montrer l'égalité $e^{-\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$ pour tout $x \in]0,2[$, où $f : x \longmapsto e^{-\sqrt{x}}$. On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

1. Calculer c_1 et c_2.
2. Montrer que f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle
$$(E) \quad 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$
3. Montrer qu'il existe des fractions rationnelles φ et ψ qu'on précisera telles pour tout entier naturel n : $c_{n+2} = \varphi(n)c_{n+1} + \psi(n)c_n$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n : $|c_n| \leq 1$. Que pouvez-vous en déduire sur le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$?
5. Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,2[$ et que S est solution de (E) sur $]0,2[$.
6. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n$.

Exercice 10

(Extrait de concours CCP MP07) On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$. On notera φ sa somme.
2. Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(xt)dt$.

••••••••••