

### Exercice 1

Déterminer si les intégrales suivantes sont définies ou non :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}} dt \quad \text{b) } \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt \\ \text{d) } & \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt \quad \text{e) } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} dt. \end{aligned}$$

### Exercice 2

On donne la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)(\sqrt{x} + 1)}$

- Démontrer que les intégrales  $I = \int_0^1 f(t) dt$  et  $J = \int_1^{+\infty} f(t) dt$  existent.
- Pour  $x > 0$  on définit la fonction  $F$  par  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ .  
Effectuer le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$  dans l'intégrale  $F(x)$ .  
Calculer  $F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ .
- En déduire l'existence et le calcul de l'intégrale  $K = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

### Exercice 3

Calculer, pour  $x \in ]1, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_0^\pi \ln(x + \cos t) dt$ .

### Exercice 4

On considère  $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$  pour  $x > -1$ .

- Montrer que  $f$  est bien définie pour tout  $x > -1$ .
- Exprimer  $f'(x)$  et en déduire l'expression de  $f(x)$ .

### Exercice 5

En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{itx} dt$ .

### Exercice 6

- Étudier les variations de la fonction  $f$  définie par :  $x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .
- Donner une relation entre  $f(x)$  et  $f(x-2)$ .
- Calculer  $f(n)$ , pour  $n$  naturel.
- Montrer que la fonction  $g$  déterminée par  $g(x) = xf(x)f(x-1)$  admet la période 1, en déduire qu'il s'agit d'une constante.
- Montrer que  $f(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Exercice 7

Soit  $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+2t \cos x + t^2)}{t} dt$ .

- Montrer que  $F$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Sachant que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}$ , donner la valeur de  $F(0)$  puis celle de  $F(x)$ .

### Exercice 8

- Pour  $x$  réel positif et  $n$  entier naturel, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

et

$$S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Montrer que  $F(x)$  existe et est compris entre  $S_n(x)$  et  $S_{n-1}(x)$ .

- Utiliser ce résultat pour calculer une valeur approchée de  $F(5)$ , avec une erreur absolue aussi petite que possible.

### Exercice 9

(Extrait de ECRIN MP97) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  à valeurs réelles et telle que  $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$  soit intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On pose :

$$T[f] : x \mapsto T[f](x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x} dt.$$

- Montrer que  $T[f]$  est définie sur  $] -1, +\infty[$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{n+1}} dt$ 
  - Justifier l'existence de  $I_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

- b. Montrer que  $\forall x \in ]-1, 1[, T[f](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n x^n$ .
3. En déduire que  $T[f]$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et exprimer les dérivées successives de  $T[f]$  en 0 à l'aide d'intégrales.

**Exercice 10**

Soit  $F$  la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

- Quel est l'ensemble  $D$  de définition de  $F$ ?
- En écrivant  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  avec  $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ , montrer que  $F$  est continue sur  $D$ .
- Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overset{\circ}{D}$  (l'intérieur de  $D$ ).
- En déduire  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 11**

(Extrait de concours Communs Polytechniques PSI98)  
 Soit  $\alpha$  un réel non nul.

- Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .
- En écrivant  $\forall x > 0, \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} = e^{-x} \sin(\alpha x) \frac{1}{1 - e^{-x}}$ , montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x} \sin \alpha x dx \right)$ .
- Conclure que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$ .

**Exercice 12**

Soit  $x > 0$ . On considère l'intégrale  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$ .

- Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] \alpha, +\infty[$ , pour tout  $\alpha > 0$ . (On pourra utiliser le fait que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (intégrale de Gauss))
- Calculer  $F(x)$ . (On justifiera toutes les étapes)

**Exercice 13**

Soit  $\alpha > 0$ . Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

**Exercice 14**

Soit  $\alpha > 0$ . Démontrer en dérivant par rapport au paramètre, et en utilisant l'intégrale de Gauss que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi \alpha}.$$

**Exercice 15**

(La fonction Gamma) On pose pour tout  $x$  réel :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- Montrer que  $\Gamma(x)$  existe si, et seulement si,  $x > 0$ . Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , en déduire  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Montrer que  $\Gamma(x)$  est équivalent à  $\frac{1}{x}$  quand  $x$  tend vers 0.
- En utilisant le changement de variable  $t = u^x$ , montrer que, pour  $x > 0$ ,  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^x} dt$ .
- Montrer que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

**Exercice 16**

Pour  $a \in [0, \pi]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on considère

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

- Calculer  $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$ ; en déduire  $I_n(\pi)$  pour tout  $n$ .
- Pour  $a \in ]0, \pi[$ , comparer  $I_n(a)$  et  $I_n(\pi - a)$ ; montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} [I_{n+1}(a) - I_n(a)] = 0$ , puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}.$$

- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin nx}{x} dx$  et en déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

• • • • •