Espaces hermitiens

Exercice 1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \overline{A}$. Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Sur $E = \mathbb{C}_2[X]$, on définit une application $(.|.)$ par :

$$(P|Q) = \overline{P(1)}Q(1) + \overline{P(i)}Q(i) + \overline{P(-i)}Q(-i).$$

1. Montrer $(.|.)$ est un produit scalaire hermitien.
2. Déterminer une base orthogonale (P_0, P_1, P_2) avec $\deg P_k = k$.

Exercice 3 On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{i\theta})}Q(e^{i\theta})d\theta.$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$ pour le produit scalaire précédent.
3. Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.
4. On pose $M = \sup\limits_{|z|=1} |Q(z)|$. Montrer que pour $M \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 4 On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes. Montrer que $\mathcal{H}_n$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner en une base. Préciser sa dimension. $\mathcal{H}_n$ est-il un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel sur le corps des complexes et F et G
des sous-espaces vectoriels de E. E c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que l'on note $E_\mathbb{R}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $E_\mathbb{R}$ vérifiant $iF \subset F$ et que si E est de dimension finie, alors $E_\mathbb{R}$ est de dimension finie et donner une formule liant la dimension de E et la dimension de $E_\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $(x|y)$ est un produit scalaire sur E, alors $\mathrm{Re}(x|y)$ est un produit scalaire sur $E_\mathbb{R}$, dit produit scalaire sous-jacent de $(x|y)$.
3. Montrer que F et G sont orthogonaux dans E si, et seulement si, ils le sont dans $E_\mathbb{R}$.
4. Montrer que F admet un supplémentaire orthogonal dans E si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal dans $E_\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit E un espace préhilbertien complexe et f un endomorphisme de E telle que :

$$\forall x \in E, \ \ (f(x)|x) = 0.$$

1. Montrer que $\forall x, y \in E, \ \ f(x)|y) = 0$, puis que $f = 0$.
2. Que se passe-t-il dans le cas réel ?

Exercice 7 Sur l'espace hermitien $\mathbb{C}_3[X]$, on pose

$$(P|Q) = \overline{P(0)}Q(0) + \int_0^1 \overline{P'(t)}Q'(t)dt$$

Montrer que l'on a défini un produit scalaire et déterminer l'orthogonal de l'espace de polynômes s'annulant en i et $-i$.

Exercice 8 Soit E l'espace vectoriel des fonctions 2π périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On pose :

$$\varphi(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire hermitien sur E. On note $\varphi(f, g) = (f|g)$.
2. $\forall k \in \mathbb{Z}$, on définit $e_k \in E$ par : $e_k : x \mapsto e^{ikx}$. Vérifier que $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n\leq k\leq n}$. Trouver la projection orthogonale d'un élément f de E sur F_n.

•••••••••••