SÉRIES

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \ln(1+u_n)$ et $t_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice 2 Étudier la convergence des séries numériques de terme général u_n, dans les cas suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n2^n},\ n \in \mathbb{N}^*.\ u_n = \frac{\ln n}{n},\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}.\ u_n = \frac{1}{2n-1},\ n \in \mathbb{N}^*.\ u_n = \frac{1}{1+2^n},\ n \in \mathbb{N}.\ u_n = \frac{1}{\ln n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 3

1. Montrer que $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ est équivalent à $\frac{a}{\sqrt{n}}$ où a est un réel à préciser.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n^\alpha} t dt$ où α est un nombre réel.
3. Même question avec $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n} t dt$.

Exercice 4 Étudier la nature de la série dont le terme général u_n est égal à :

$$u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}; \quad u_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \quad u_n = e^{-\sqrt{1+n}}; \quad u_n = e^{\frac{a}{n}} - \sqrt{1-\frac{b}{n}},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5 Soit la série de terme général $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est une série alternée.
2. En utilisant les développements limités montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge.

Exercice 6 Soit $\sum u_n$ une série convergente, à termes positifs ou nuls. Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sqrt{u_n}$ $(n \geqslant 1)$.

Exercice 7 Soit f une fonction positive décroissante pour $x \geq 1$. On pose $\varphi(n) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} f(p) - \int_1^n f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente (on comparera $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$).
2. APPLICATION :
   (a) Soit la série $g(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $g(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ au voisinage de $^+$.
   (b) Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

(c) Montrer que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n \geq 1$) est convergente.

Exercice 8

1. Soit f une fonction continue décroissante sur $[0, +\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Étudier la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t dt$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier le cas particulier : $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

1. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge, et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Exercice 10 (Lemme de Cauchy) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positives et décroissante. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente si, et seulement si, $\sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k a_{2^k}$ converge.

Exercice 11

1. Calculer les sommes
$$U = \sum_{k=1}^{p} \overset{2}{\text{cotan}} \frac{k\pi}{2p+1}, \quad S = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$$
2. En utilisant $\text{cotan}\, t < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sin t}$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.
3. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ existe et qu'elle est égale à la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 12 (**Théorème d'Abel**) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels telles que :

1. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.
2. la suite de terme général $B_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ est borné.

Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.
Application : retrouver le critère de convergence spécial aux séries alternées.

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et T un endomorphisme de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

1. Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \inf_{n\geq 1} u_n$. l est appelé rayon spectral de l'endomorphisme T.
2. Si $l < 1$, montrer que $I - T$ est inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-5}{6} \\ \frac{5}{3} & \frac{-7}{6} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Monter que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} A^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 14 On munit l'espace $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$\begin{array}{rcl} T: & E & \longrightarrow E \\ & f & \longmapsto T(f) : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt \end{array}$$

1. Calculer T^n avec un seul symbole d'intégration.
2. Calculer la norme subordonnée $\|T^n\|$ de T^n. En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} T^n$ converge.
3. Montrer que $\Phi(f)(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n(f)(x)$ pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$.
4. Montrer que $(1-T)\Phi(f) = f$.

Exercice 15 Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p > 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. Sp$(A) \subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
2. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$.
3. La série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

•••••••••••