SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}[X]$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 2 Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

Exercice 3

1. Soit $\alpha > 0$ un réel positif donné. Étudier les suites d'applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ déterminées par :
$$f_n(x) = e^{-nx}\sin(n\alpha x); \quad g_n(x) = e^{-nx}\cos(n\alpha x).$$
2. Même question pour la suite d'applications définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1})$.

Exercice 4 Existe-il des intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la suite de fonction
$$f_n(x) = \frac{1}{\sin^2 x + (1 + x^2)^n}$$
est uniformément continue ?

Exercice 5

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f_n(0) = 1; \\ f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2} \quad \text{si } x > 0. \end{cases}$$
converge vers une fonction f.
2. La convergence est-elle uniforme quand on envisage les restrictions des fonctions f_n à l'un des intervalles $[0, 1]$ ou $[1, 2]$?

Exercice 6 Soit f la fonction déterminée par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{n!}\arccos(\cos nx)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, +\infty[$. Calculer $f(\pi)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Montrer que, p étant un entier positif,
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{p}\right], \quad 0 < ex - f(x) < \frac{(p+1)!x}{pp!}.$$
3. La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?

Exercice 7

1. On considère une fonction f, définie sur $[0, 1]$, de classe au moins égale à $n + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe un, et un seul, polynôme P_n, de degré au plus égal à n tel que
   $$P_n\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i}{n}\right), \quad (i = 0, 1, 2, ..., n).$$
   (b) Montrer qu'tout point $x_0 \in [0, 1]$ on peut associer un point $c \in]0, 1[$ tel que
   $$f(x_0) - P_n(x_0) = x_0\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\left(x_0 - \frac{2}{n}\right)...\left(x_0 - \frac{n}{n}\right)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

2. On choisit : $f(x) = xe^{-x}$.
   A tout entier naturel n, on associer un polynôme P_n(cf.1.a)). Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 8 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Étudier la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 9 Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 0 \text{ et } u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Est-ce que la dérivée de la somme est égale à la somme de la dérivée ?

Exercice 10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(1) = 0$. Montrer que la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que $f_n(x) = x^n f(x)$, converge uniformément.

Exercice 11 Soit g la fonction réelle de la variable réelle déterminée par

$$(1) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{x+n}.$$

1. Quel est le domaine de définition $\mathscr{D}_g$ de g ? Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_g$.
2. Montrer que l'application $x \longmapsto xg(x) - g(x+1)$ est constante sur $\mathscr{D}_g$. $g(x)$ et $xg(x)$ admettent-elles des limites quand x tend vers 0 (resp. $+\infty$) ? Étudier et représenter graphiquement les restrictions de g à $]0,+\infty[$ et à $]-1,0[$; préciser la concavité du graphe.
3. (a) Montrer que pour tout N naturel et pour tout u réel on a
   $$e^{-u} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{u^n}{n!} + (-)^{N+1} e^u \frac{u^{N+1}}{N!}\int_0^1 t^N e^{tu} dt.$$
   (b) Calculer $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x+n-1}dt$ pour $x > 0$ et n entier naturel).
   (c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \displaystyle\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du$.
4. (a) Calculer $J_n(x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}\displaystyle\int_0^1 \cos((x+n)\pi t)dt$ (x non entier).
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((x+n)\pi t)}{n!}$.
   Montrer que, pour x non entier, on a $g(x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}\displaystyle\int_0^1 e^{\cos \pi t}\cos(\pi t x + \sin \pi t)dt$.

Exercice 12 Calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x^x dx$ avec une erreur absolue n'excédent pas 10^{-3}.

• • • • • • • • • • •