Séries doubles, familles sommables

Exercice 1 Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Exercice 2 On considère la fonction ζ de Riemann, définie, pour $x \in]1,+\infty[$, par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Démontrer les relations suivantes :

1. $$\sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p)-1) = 1 \text{ et } \sum_{p=2}^{\infty}(-1)^p(\zeta(p)-1) = \frac{1}{2}.$$

2. $$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\zeta(p)-1}{p} = 1-\gamma \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(-1)^p\zeta(p)}{p} = \gamma.$$

   γ étant la constante d'Euler.

Exercice 3 *(Théorème de Mertens)*
Soient $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad V = \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p<q$, on note $V_{p,q} = \sum\limits_{k=p+1}^{q} v_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$U_nV_n - W_n = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}.$$
2. En déduire
$$\lim_{n\to\infty}(U_nV_n - W_n) = 0.$$
3. Conclure.

Exercice 4 Soient $a_{p,q} = z^{pq}$ avec $p \geq 1, q \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la série double $\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{p,q}$ est convergente si, et seulement si, $|z|<1$, et que sa somme S est
$$S = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{z^p}{1-z^p}.$$

2. Montrer que
$$S=\sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n,$$
où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 5 *(Extrait de CNC 1999)*

1. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On admet l'égalité suivante :
$$\pi x \operatorname{cotan} \pi x=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 x^2}{x^2-n^2}.$$
   (a) Développer en série entière au voisinage de l'origine la fonction : $x \longmapsto \dfrac{2 x^2}{x^2-n^2}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
   Préciser le rayon de convergence.
   (b) Montrer pour $|x|<1$, la sommabilité de la suite double $\left(\dfrac{x^{2 k}}{n^{2 k}}\right)_{n, k \geqslant 1}$.
   (c) En déduire pour $0<|x|<1$, la relation
$$\pi x \operatorname{cotan} \pi x=1-2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2 k) x^{2 k}.$$
2. Retrouver alors la valeur de $\zeta(2)$ puis calculer $\zeta(4)$.
3. (a) Exprimer $\tan (2 x)$ en fonction $\tan (x)$, en déduire $\tan (x)$ en fonction de $\operatorname{cotan}(2 x)$ et $\operatorname{cotan}(x)$, puis donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de $\tan (x)$.
   (b) Préciser le rayon de convergence.
4. (a) Montrer la convergence simple sur $[0,1[$ des séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1-x^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$.
   (b) Établir pour x dans $[0,1[$ la relation
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$
5. (a) Montrer la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x+\cdots+x^{n-1})^2}.$$
   Indication : On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-}(1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1-x^n}=\frac{\pi^2}{6}$.

• • • • • • • • • •