INTÉGRALE SIMPLE

Exercice 1 Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$. Trouver la limite de $\displaystyle\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

1. Soient $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ deux réels, tels que $\alpha+\beta=1$. Soit x_0 un réel. on considère les deux fonctions : $x \mapsto \varphi(x) = e^{\alpha x}e^{\beta x_0}$ et $x \mapsto \psi(x) = \alpha e^x + \beta e^{x_0}$
   (a) Montrer que φ et ψ prennent la même valeur en x_0.
   (b) Montrer que pour $x \geq x_0$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$.
   (c) En déduire que si x et y sont deux réels quelconques, on a : $e^{\alpha x}e^{\beta y} \leq \alpha e^x + \beta e^y$.
2. Soient p et q deux réels positifs, tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Soient f et g deux fonctions réglées définies sur l'intervalle $[a,b]$ ($a<b$).
   (a) Montrer que si f et g ne prennent que des valeurs strictement positives, et si :
   $$\int_a^b f(x)^p dx = \int_a^b g(x)^q dx = 1,$$
   alors
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq 1.$$
   (Poser $f(x) = e^{\frac{\varphi(x)}{p}}$ et $g(x) = e^{\frac{\psi(x)}{q}}$, en justifiant que cela est possible.)
   (b) Montrer que si f et g ne prennent que des valeurs strictement positives, on a :
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 3

1. On note S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $f : [0,2\pi] \longrightarrow S^1$ une application dérivable. On pose
   $$h(u) = \int_0^u \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$
   (a) On pose $g(u) = e^{-h(u)}f(u)$. Montrer que la fonction g est constante.
   (b) En déduire que si $f(0) = f(2\pi)$,
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
   est un élément de $\mathbb{Z}$.
2. Si φ est une application de S^1 dans S^1, telle que $x \mapsto f(x) = \varphi(e^{ix})$ soit dérivable (c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans S^1), l'entier $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ sera noté $d°(\varphi)$, et appelé le degré de φ.