Séries entières

Exercice 1 Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R.

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} d(n)x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s(n)x^n$ où $d(n)$ et $s(n)$ désignent respectivement le nombre de diviseurs supérieurs à 1 de l'entier n et la somme de ceux-ci.

Exercice 3

1. Trouver l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Expliciter $f(x)$ à l'aide des fonctions classiques.

Exercice 4 Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n+2}$ et calculer sa somme.

Exercice 5 *(Extrait de MINES-PONTS PSI 97)* Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telles que :

- $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

On définit alors la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ par $b_1 = a_1$ et $b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ pour $n \geq 2$. On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} b_n x^n$.

On note $A : x \longmapsto A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ et $B : x \longmapsto B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

1. Montrer que $R_1 \geq 1$
2. Montrer que A est définie et continue sur $[-1, 1]$
3. (a) Montrer que $0 \leq b_n \leq 1$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1
   (b) Que peut-on en déduire pour R_2 ?
4. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$.
5. Montrer que $R_2 = 1$.

Exercice 6 Donner une expression aussi simple que possible de la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Exercice 7

Partie A : règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
   (b) Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   (c) Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).
5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

PARTIE B : APPLICATIONS

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.
2. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.
   (a) Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.
   (b) Établir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$. En déduire la nature de la série $\sum I_n$.
3. Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\ ;\ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\ ;\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   (a) Indiquer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.
   (b) Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
   (c) Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \ \text{ et } \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

   (d) Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.
   (e) On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
      i. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.
      ii. Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8 *(Extrait de concours CCP MP07)* On considère $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$. On notera φ sa somme.
2. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\varphi(xt)dt$.

• • • • • • • • • • •