

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|c_n(f)|}{n}$ converge.

Exercice 2 Développer en série de FOURIER la fonction $f : x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^p$, alors $c_{|n|}(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
2. Inversement justifier que si $c_{|n|}(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^p$.

Exercice 4 On considère la fonction f , 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f : x \mapsto x(2\pi - x)$

1. Former le développement en série de Fourier de f .
2. En déduire les valeurs des sommes :

$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	$C = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$	$D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$	$F = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$	$G = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$	$H = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$

Exercice 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = \cos \alpha t$ avec $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f .
2. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$.
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |\cos x|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f .
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$.

Exercice 7 (INÉGALITÉ DE WIRTINGER) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

1. Retrouver la relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$.
2. Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$, et préciser le cas d'égalités.

Exercice 8 Soit $\theta \in]0, \pi[$. Calculer de deux manières la partie réelle de l'intégrale $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{i(n+1)\theta} \right) dt$, afin d'en déduire l'expression de la somme de la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$.

Exercice 9 (*Extrait de ESTP PC99*) Soit f la fonction paire et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$ pour x appartenant à $[0, \pi]$. Le but de l'exercice est de montrer que la série de Fourier de f converge pour tout réel x de $\mathbb{R}$ et que sa somme est f sur $\mathbb{R}$.

1. Peut-on appliquer un théorème de cours ?

2. Soit $G : x \mapsto G(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$.

Montrer que $G(x) = \frac{1 - \cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1 - \cos(t^2)}{2t^2} dt$ pour tout réel x strictement positif.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ existe, est finie et est strictement positive.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$. En vous servant de la question précédente, montrer qu'il existe une constante D telle que $a_n \sim \frac{D}{n^{\frac{3}{2}}}$.

4. En déduire que la série de Fourier de f converge pour tout réel x de $\mathbb{R}$ et que sa somme est f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 1. Soit $t \in]0, \pi[$. Former le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos t + x^2}.$$

2. En déduire le développement en série de Fourier de $t \mapsto \frac{1}{1 - \sin \alpha \cos t}$, pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 11 Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

1. (a) Développer en série trigonométrique la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b , de l'équation $z^2 - az + 1 = 0$).

(b) La série obtenue est-elle la série de Fourier de f ?

2. Déduire de 1. la valeur des intégrales $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (*Deuxième théorème de Weierstrass*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π -périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_n = \left[\int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n dt \right]^{-1}$ et $T_n(t) = \frac{\delta_n}{2} \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n$.

1. Pour $0 < \delta < \pi$, on pose $T_\delta(n) = \int_\delta^\pi T_n(t) dt$. Montrer que $0 \leq 2I_\delta(n) \leq \frac{n+1}{2} \pi \left(\cos \frac{\delta}{2} \right)^n$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\delta(n) = 0$.

2. Soit le polynôme P_n définie par : $P_n(t) = \int_{-\pi}^\pi f(t) T_n(t-x) dx$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que $\forall t \in [-2\pi, 2\pi]$, $|f(t) - P_n(t)| \leq 4MI_\delta(n) + \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Conclure.

• • • • •