FONCTIONS À VARIABLE COMPLEXE

Exercice 1 Étudier la $\mathbb{C}$-dérivabilité de l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $f(z) = \dfrac{1}{z} + z\text{Re}(z)$.

Exercice 2 Soit

$$\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[& \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto \phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

le changement de coordonnées polaires. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ une application$\mathbb{C}$-dérivable en $z = x + iy = re^{i\theta}$ et soit $\widehat{f} = f \circ \phi$.
Montrer que $\widehat{f}$ est différentiable en (r, θ) et ses composantes $\widehat{u} = u \circ \phi$ et $\widehat{v} = v \circ \phi$ vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial r}(r, \theta) = \dfrac{\partial \widehat{v}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial r}(r, \theta) \end{cases}$$

Exercice 3
1. La fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z \longmapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$ est-elle holomorphe ? Quelle est sa différentielle ?
2. Montrer que la fonction $f : z \longmapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, de même pour les fonctions $f : z \longmapsto \text{Re}(z)$ et $f : z \longmapsto \text{Im}(z)$.

Exercice 4
1. Montrer que la fonction $f(z) = \dfrac{2z}{1 - z - 2z^2}$ est holomorphe au voisinage de 0.
2. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière en 0.
   (a) Montrer que les coefficients a_n vérifient
   $$a_0 = 0, a_1 = 2 \ \text{ et } \ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \ \text{ pour } \ n \geq 2.$$
   (b) Établir que $0 < a_n \leq 3^{n-1}$ pour $n \geq 2$.
   (c) Calculer explicitement les coefficients a_n. Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

Exercice 5 Trouver une fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\text{Re}(f(z)) = \cos x \,\text{ch}\, y$.

Exercice 6 *(holomorphie de la fonctions zéta et Gamma)*
Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur leurs domaines de définition :

1. Fonction ζ de Riemann $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z}$.
2. Fonction Gamma $\Gamma : z \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.

Exercice 7 *(Transformée de Laplace)*
Soit une fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f(t)| \leq Ce^{at}.$$

On pose $\mathscr{L}f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$.

1. Montrer que $\mathscr{L}f$ est bien définie sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\text{Re}(z) > a\}$.
2. Montrer que $\mathscr{L}f$ est holomorphe sur Ω et que pour tout $z \in \Omega$, $(\mathscr{L}f)'(z) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}dt$.

Exercice 8 *(la fonction sinus)*
On rappelle $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Cette fonction est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, et coincide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction sinus classique.

1. Calculer $|\sin(iy)|$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + iy\right)$ pour y réel. La fonction sinus est-elle bornée sur $\mathbb{C}^*$?
2. Prouver que $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. En déduire $\operatorname{sh}|y| \leq |\sin(x+iy)| \leq \operatorname{ch} y$.
3. On considère le rectangle
$$\Gamma = \{z = x + iy/0 \leq x \leq \pi, -a \leq y \leq a\}$$
pour $a > 0$.
Calculer $\displaystyle\sup_{z\in\Gamma} |\sin z|$. En quels points de Γ cette borne supérieure est-elle atteinte ? Montrer que $\sin z$ n'atteint pas de maximum sur l'ouvert
$$\{z = x + iy/0 < x < \pi, -a < y < a\}.$$

Exercice 9 Lorsque z est complexe les fonctions $\sin(z), \cos(z), \operatorname{sh}(z)$ et $\operatorname{ch}(z)$ sont définies par les formules :
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \operatorname{sh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

1. Montrer que $\cos$ et ch sont des fonctions paires et $\sin$ et sh des fonctions impaires et donner leurs représentations comme séries entières.
Prouver $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$, $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$, $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$, $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$.
2. Établir les formules : $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$, $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ en écrivant de deux manières différentes $e^{i(z+w)}$. Donner une autre preuve en utilisant le principe du prolongement analytique et la validité (admise) des formules pour z et w réels.
3. Prouver pour tout z complexe $\cos(\pi + z) = -\cos(z), \sin(\pi + z) = -\sin(z)$. Prouver $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \sin(z)$.
4. Prouver les formules $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

•••••••••