ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 *(Équation différentielle de Bernoulli)* On considère l'équation différentielle de la variable réelle x.

$$(E) \quad xy'(x) + (x-1)y(x) = -y^2(x).$$

1. (a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$. (on justifiera que si y n'est pas la fonction nulle, on peut poser $u(x) = \dfrac{1}{y(x)}$)

   (b) Déterminer de même les solutions de l'équation (E) sur $]-\infty, 0[$.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Donner la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont dérivables et qui vérifient (E) : $f'(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 3 Considérons l'equation différentielle $(E) : y' = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2}$.

1. Justifier l'existence d'une solution maximale (I, φ) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$, pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'intervalle I est majorée et que $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Exercice 4 Considérons l'équation différentielle :

$$(E) \;\; y' = t^2 + y^2$$

1. Justifier l'existence d'une solution maximale φ de (E) telle que $\varphi(0) = 0$.
2. Montrer que φ est une fonction impaire.
3. Étudier la monotonie et la concavité de φ.
4. Montrer que φ est définie sur un intervalle bornée de $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variation de φ.

Exercice 5

1. Montrer que le problème de Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+xy} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

   possède une solution maximale unique.
2. Montrer que celle-ci est impaire et croissante.
3. Établir enfin qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'(x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
2. $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 7

1. Déterminer les solutions ne s'annulant pas de $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$. (poser $z = \sqrt{y}$)

2. Résoudre les équations autonomes suivantes :

$$a)\ \ y' = 1 + y^2, \quad b)\ \ y' = y^2, \quad c)\ \ y' = y(y-1).$$

Exercice 8 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = (2-t)x + (t-1)y \\ y' = 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}.$$

Exercice 9 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$1) \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 10x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 10 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}.$$

Exercice 11 Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ les équations différentiels suivants :

$$1)\ \ ty'' + ty' - y = 1 \quad 2)\ \ t^2y'' + ty' - y = 1.$$

Exercice 12 Résoudre les équations différentiels suivants :

$$1)\ \ y'' + y = \tan t \quad 2)\ \ y'' + y = \tan^2 t.$$

Exercice 13 Résoudre sur $]0,1[$ l'équation différentiel $t(1-t)y'' + (1-3t)y' - y = 0$ en commençant par rechercher une solution développable en série entière.

Exercice 14 Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentiel $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en commençant par rechercher une solution développable en série entière.

Exercice 15 *(Extrait d'un concours)* Les fonctions de Bessel sont les solutions de l'équation différentielle de second degré :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

où p est une constante positive.

1. Montrer que l'équation différentielle (1) admet une solution développable en série entière de la forme
$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
2. Montrer que $a_1 = 0$.
Dans la suite on note Jp (la fonction de Bessel du premier type d'ordre p) la solution pour laquelle $a_0 = \dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$
3. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\dfrac{d}{dx}[J_0(x)] = -J_1(x)$.
   (b) $\dfrac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$.
   (c) Entre deux racines positives de $J_0(x)$ il y a une racine de $J_1(x)$.
   (d) Entre deux racines positives de $J_1(x)$ il y a une racine de $J_0(x)$.

• • • • • • • • • • •