ESPACES VECTORIELS NORMÉS
LIMITE ET CONTINUITÉ

Exercice 1 Soit A une partie dense d'un espace vectoriel normé E. Montrer que, si toute suite de Cauchy de points de A converge dans E, E est complet.

Exercice 2

1. Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et f une application de A dans A telle que : il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de A^2 :
$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|.$$
Montrer que f admet un point fixe $a \in A$ et un seul, qui est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A définie par :
$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$
Indication : Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Application : En étudiant l'application : $T : f \longrightarrow T(f)$ définie sur $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$, par :
$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x \sin(tf(t))dt,$$
montrer que l'équation différentielle $\begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet une solution unique dans E.

Exercice 3 L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{C})$ étant normé par la norme de la convergence uniforme, montrer que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel normé, A un compact de E et f une application de A dans A telle que :
$$\forall (x,y) \in A^2, (x \neq y) \;\; d(f(x), f(y) < d(x,y).$$
Prouver que f a un point fixe (c'est-à-dire il existe $z \in A$ tel que $f(z) = z$). (procéder par l'absurde en supposant que $c = \inf\{d(x, f(x)), x \in A\} > 0$).

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E ; on pose $d(x,F) = a$.
Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y)$.

Exercice 6 On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On pose pour $p \in \mathbb{N}^*$, $B_p = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.

1. Montrer que la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une valeur d'adhérence B telle que $B^2 = B$.
2. Montrer que $\ker(A - I) \oplus \text{Im}(A - I) = \mathbb{C}^n$.

Exercice 7 Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :
$$a) \;\; f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} \quad b) \;\; f(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^4} \quad c) \;\; f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$d) \;\; f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad e) \;\; f(x,y) = \frac{xy}{x-y}, \quad f) \;\; f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Exercice 8 On note $l^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel normé de suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{C})$, on pose $M(u)$ et $\triangle(u)$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M(u))_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} \text{ et } (\triangle(u))_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que les applications T et $\triangle$ sont des endomorphismes continues de l^∞ et calculer leur norme.

Exercice 9 Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et f une application de E dans F vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et f bornée sur la boule unité.
Montrer que f est une application linéaire.

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$f \circ g - g \circ f = Id_E$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.
2. Montrer que f et g ne sont pas simultanément continus.
3. En déduire qu'il n'existe pas $(f,g) \in \mathscr{L}^2(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = Id_E$ si E est de dimension finie.
4. Trouver un exemple de tels couples (f,g).

Exercice 11 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et $(f_j)_{1 \le j \le p}$ des bases de E et F respectivement. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n}$ la matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$, calculer $\|f\|$ dans les cas suivants :

1. E et F munis de la norme 1 : $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{p} |y_i|$ (sur F).
2. E et F munis de la norme ∞ : $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_\infty = \sup\limits_{j \in [\![1,p]\!]} |y_i|$ (sur F).

Exercice 12 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et $u \in \mathscr{L}_c(E)$ tel que $Id_E - u$ est bicontinu. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $Id_E - u^n$ est bicontinu et comparer son inverse à $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(Id_E - e^{\frac{2ik\pi}{n}} u \right)^{-1}$.

Exercice 13 Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme définie par : $\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Soit T l'application de E de E définie par : E

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est linéaire continue sur $(E, \|.\|_1)$, et calculer $\|T\|$.
2. Montrer que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Exercice 14 Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $\begin{array}{llll} T: & E & \longrightarrow E \\ & P & \longmapsto P' \end{array}$ et $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$N(0) = 0 \text{ et } \forall P \in E, \quad N(P) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. T est-elle continue pour N ?

Exercice 15 On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par : $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right|, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E$, $f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|.\|)$ et déterminer $\|f\|$.

• • • • • • • • • • •