# INTÉGRALE CURVILIGNE-INTÉGRALES MULTIPLES

## EXERCICE N° 1

On considère la forme différentielle $w$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$w(x,y) = (x^2+y^2-a^2)dx - 2aydy,$$

où $a$ est un nombre réel non nul.

1. Prouver que la forme différentielle n'est pas exacte.
2. Soit $f$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha(x,y) = f(x)w(x,y)$. Quelle condition doit vérifier la fonction $f$ pour que la forme différentielle $\alpha$ soit exacte ? Cette condition est-elle suffisante ? Déterminer une fonction $f$ vérifiant la condition précédente.
3. Calculer une primitive de $\alpha$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $\Gamma$ le cercle de rayon $R$ et de centre $(0,0)$. Déterminer $\displaystyle\int_\Gamma \alpha$.

## EXERCICE N° 2

1. Montrer que les expressions suivantes sont des différentielles exactes en précisant $f(x,y)$ telle que $\omega = df$

   a) $\omega = (x-y)dx - xdy$

   b) $\omega = \dfrac{2x}{y}dx + \left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$

2. On considère la forme différentielle suivante :

$$\omega = (3xy+y^2)dx + (x^2+xy)dy$$

   a) Montrer que $\omega$ n'est pas une différentielle exacte.

   b) On pose $u(x) = x$.
   Montrer que $\omega_u = u(x)(3xy+y^2)dx + u(x)(x^2+xy)dy$ est une différentielle totale exacte, déterminer $f$ telle que $df = \omega_u$.

## EXERCICE N° 3

Calculer les intégrales curvilignes ssuivantes :

1. $I = \displaystyle\int_\Gamma x^2dx - y^2dy$ où $\Gamma$ est un paramétrage direct du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon
2. $I = \displaystyle\int_\Gamma x^2dx + y^2dy$ où $\Gamma$ est un paramétrage direct du triangle $(OIJ)$ avec $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

## EXERCICE N° 4

On considère la forme différentielle $w(x) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

1. La forme différentielle $w$ est-elle fermée ?
2. Calculer l'intégrale de $w$ le long du cercle de centre $O$, de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

**3.** La forme différentielle $w$ est-elle exacte ?

## EXERCICE N° 5

Soit $D$ le domaine du plan définie par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

**1.** Représenter le domaine $D$.

**2.** On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. Montrer que si $(x,y)$ décrit le domaine $D$, alors $\theta$ décrit l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2\cos\theta$

**3.** En déduire la valeur de l'intégrale $\int\int_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$.

## EXERCICE N° 6

**1.** Calculer l'intégrale double : $I = \int\int_D |x+y| dxdy$ où $D$ est l'intérieur du triangle des sommets $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$ et $C(1,1)$.

**2.** a) Déterminer une primitive de $\sin^3 x$.

b) Soit $D$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

Représenter le domaine $D$.

c) Calculer l'intégrale $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$.
On pourra utiliser les coordonnées polaires.

## EXERCICE N° 7

Calculer l'intégrale : $\int\int_\triangle (x^3 - 2y) dxdy$ où

$$\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = au\cos\theta$ et $y = bu\sin\theta$.

## EXERCICE N° 8

**1.** Calculer l'intégrale double : $I = \int\int_D \frac{\sin(x)}{x} dxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq \pi \text{ et } y \leq x \leq \pi\}.$$

**2.** a) Déterminer une primitive de $\sin^3 x$.

b) Soit $D$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 2y\}$$

Représenter le domaine $D$.

c) Calculer l'intégrale $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$.
On pourra utiliser les coordonnées polaires.

## EXERCICE N° 9

Calculer le volume du solide délimité supérieurement par la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$, latéralement par le cône d'équation $x^2+y^2=z^2$.

Utiliser les coordonnées sphériques ( $2^e$ version ) $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ , $J=r^2\sin\varphi$.

## EXERCICE N° 10

Calculer $I=\int\int\int_D z^2dxdydz$ où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2\leq R^2; 0\leq z\leq h\}$ en passant aux coordonnées cylindriques.

## EXERCICE N° 11

UN CALCUL DE L'INTÉGRAL $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

**1.** $r$ et $R$ sont deux réels strictement positifs tels que $r<R$ Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\left[(x\sin x-y\cos x)dx+(x\cos x+y\sin x)dy\right]$$

le long de ce contour orienté.

**2.** En déduire $\int_r^R\frac{\sin x}{x}\,dx$ en fonction d'une autre intégrale.

**3.** En faisant tendre $r$ vers $0$ et $R$ vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

•••••••••