COURBES ET SURFACES

EXERCICE N° 1

Pour les fonctions f_i suivantes, déterminer le sous-ensemble D_i de $\mathbb{R}^2$ sur lequel df_i est rang 2 ; pour chaque point (a,b) de D_i, calculer l'équation du plan tangent au point $f_i(a,b)$ à la surface Γ_i paramétrée par f_i.

1. $f_1(u,v)=(u^2+v^2,u^2-v^2,uv)$
2. $f_2(u,v)=(\cos(u^2+v^2),\sin(u^2+v^2),uv$
3. $f_3(u,v)=(e^u,e^v,u+v)$
4. $f_4(u,v)=(u^3,v^3,u^2+v^2)$

EXERCICE N° 2

Quelle est la nature des coniques et des quadriques suivantes, dont les équations dans une la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont :

1. $2x^2+6xy+5y^2+4x+-y+1=0$;

2. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$;

3. $yx+yz-1=0$;

4. $x^2+3y^2-8z^2-4xy+2xz-10yz-x-5y-12z+1=0$.

EXERCICE N° 3

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les surfaces S et T d'équations respectives

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

où a,b,c sont trois réels strictement positifs fixés.

1. Étudier l'intersection de S avec un plan parallèle au plan xOy.

2. Comment passe-t-on de la surface S à la surface T ?

EXERCICE N° 4

Pour $1\leq i\leq 4$, on considère la fonction F_i de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie ci-dessous et la surface Γ_i d'équation $F_i(x,y,z)=0$. Ecrire les équations de la normale à Γ_i au point a_i indiqué.

1. $F_1(x,y,z)=3xyz-x^3-y^3-z^3,\quad a_1=(0,-1,1)$

2. $F_2(x,y,z)=3e^{xyz}+x+y+z-3,\quad a_2=(0,0,0)$

3. $F_3(x,y,z)=\arctan xy+\arctan yz,\quad a_3=(1,1,-1)$

4. $F_4(x,y,z)=xy^2+x^2z-2y,\quad a_4=(1,1,1)$

EXERCICE N° 5

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^4-x^3+xy-y^2-z=0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ parallèle au plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

2. Etudier localement la position relative de la surface $\mathcal{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.

3. Etudier la position relative globale de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

• • • • • • • • • • •